

FILTRY REZONANSOWE PODWÓJNIE NASTROJONE PROJEKTOWANE ZA POMOCĄ ALGORYTMU GENETYCZNEGO

Double Tuned Filters Designed by Using Genetic Algorithm

Ryszard KLEMPKA
Akademia Górniczo-Hutnicza

Streszczenie: Śledząc tendencje współczesnej nauki, można zauważyć WZROST zastosowań „sztucznej inteligencji” w praktycznych rozwiązaniach. Idąc w tym kierunku, zdecydowano się zastosować algorytmy genetyczne (AG) do projektowania pasywnego filtra podwójnie nastrojonego jako przykład przydatności AG w zagadnieniach technicznych. Projektowanie takiego filtra można potraktować jako zadanie optymalizacji wielokryterialnej, do którego rozwiązania można użyć algorytmów genetycznych. Artykuł przedstawia analizę filtra podwójnie nastrojonego oraz jego sześciu różnych konfiguracji, zaprojektowanych za pomocą opracowanego przez autora, w środowisku Matlab, programu wykorzystującego AG. Przedstawiono dwie metody podejścia do postawionego zadania projektowego.

Summary: Observing tendencies present science, one can notice growing of uses “artificial intelligence” in practical solutions. Going in this of direction, to decide to use genetic algorithms (AG) to designing of passive filter double tuned as example of usefulness AG in technical problems. Designing of such filter one can treat as assignment of multicriteria optimization, to solutions, which one can use genetic algorithms. Article introduces analysis of double tuned filter and his six of different configuration, designed by author, in environment Matlab, of program using AG. One introduced two methods of approach to put assignments project.

Słowa kluczowe: filtr pasywny podwójnie nastrojony, korekcja współczynnika mocy, redukcja współczynnika THD, algorytmy genetyczne
Key words: double tuned passive filter, power factor correction, THD factor correction, genetic algorithms

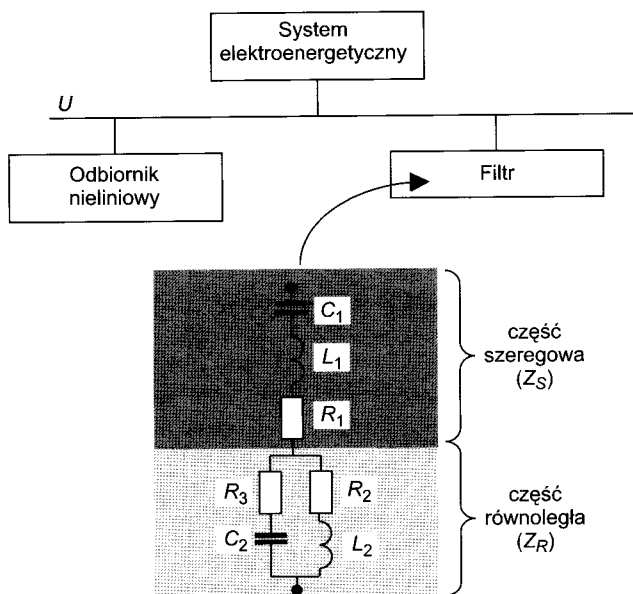
1. FILTR REZONANSOWY PODWÓJNIE NASTROJONY

W systemach elektroenergetycznych nieliniowy odbiornik (np. przekształtnikowy) powoduje zniekształcenia prądów i napięć. Zniekształcenia te wysoce niekorzystnie wpływają na prawidłową pracę systemu zasilającego. Większość odbiorników ma charakter rezystancyjno-indukcyjny, co wymusza na użytkownikach stosowanie układów do kompensacji mocy biernej ze względów ekonomicznych. Z tych dwóch powodów, w układach przekształtnikowych o bardzo dużej mocy (np. układy HVDC) stosuje się niekiedy filtry rezonansowe podwójnie nastrojone. Jak każde rozwiązanie techniczne, tak i to ma swoje wady i zalety (w porównaniu z filtrami prostymi), które zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wady i zalety filtra podwójnie strojonego w stosunku do dwóch ekwiwalentnych filtrów prostych

Wady	Zalety
– trudniejszy proces strojenia	– mniejsze straty mocy dla częstotliwości podstawowej
– większa wrażliwość charakterystyki częstotliwościowej na zmiany wartości elementów składowych	– redukcja liczby dławików pozostających pod wpływem napięcia liniowego
	– zespolona, zwarta konstrukcja
	– jeden wyłącznik

Opłacalność stosowania takiego filtra dotyczy wyłącznie instalacji bardzo dużych mocy. Z tego powodu nie są one powszechnie używane w przemyśle. Istnieją jednakże przypadki (rzadkie) uzasadniające stosowanie takiego filtra, np. w celu:



Rys. 1. Filtr rezonansowy podwójnie nastrojony w systemie elektroenergetycznym

- minimalizacji wyższych harmonicznych
- kompensacji mocy biernej
- minimalizacji strat mocy w filtrze.

Istnieje wiele różnych konfiguracji filtrów podwójnie nastrojonych. Najprostszą, a zarazem najpowszechniejszą, przedstawiono na rysunku 1.

Analiza układu jak na rysunku 1 nie jest prosta, dlatego, dla uproszczenia, w pierwszej fazie projektowania zakłada się, że $R_1 = R_2 = R_3 = 0$. Impedancję zastępczą filtra można opisać związkiem:

$$Z_F(\omega) = Z_S(\omega) + Z_R(\omega) \quad (1)$$

gdzie:

$Z_S(\omega)$ — impedancja części szeregowej filtra;

$Z_R(\omega)$ — impedancja części równoległej filtra.

Impedancja części równoległej Z_R określa zależność:

$$Z_R = -j \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1} \quad (2)$$

Pulsację rezonansową ω_R wyraża wzór (3). Po przekształceniu otrzymuje się zależność na indukcyjność dławika części równoległej:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \Rightarrow L_2 = \frac{1}{\omega_R^2 C_2} \quad (3)$$

Wstawiając (3) do (2) otrzymujemy:

$$Z_R = -j \frac{\omega}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)} \quad (4)$$

Impedancja części szeregowej filtra opisuje zależność:

$$Z_S = j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = j \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega C_1} \quad (5)$$

Pulsacja rezonansowa ω_S wyrażona jest wzorem (6), a po przekształceniu otrzymuje się zależność na indukcyjność części szeregowej:

$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \Rightarrow L_1 = \frac{1}{\omega_S^2 C_1} \quad (6)$$

Podstawiając (6) do (5) otrzymujemy:

$$Z_S = j \frac{\omega^2 - \omega_S^2}{\omega C_1 \omega_S^2} \quad (7)$$

Z zależności (1), (4) i (7) impedancja zastępcza filtra:

$$Z_F = j \frac{\omega^2 - \omega_S^2}{\omega C_1 \omega_S^2} - j \frac{\omega}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)} = \quad (8)$$

$$= j \frac{\omega^4 - \omega^2 \left[\omega_R^2 + \omega_S^2 \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2} \right) \right] + \omega_S^2 \omega_R^2}{C_1 \omega_S^2 (\omega^2 - \omega_R^2) \omega}$$

Charakterystyki impedancji Z_S i Z_R w funkcji częstotliwości przedstawiono na rysunku 2a i 2b. Na rysunku 2c przedstawiono charakterystykę wypadkową dla szeregowego połączenia Z_S i Z_R . Zaznaczono na niej dwie nowe częstotliwości rezonansowe — ω_1 i ω_2 — będące częstotliwościami dostrojenia filtra podwójnie nastrojonego. Dla tych częstotliwości impedancja całkowita filtra jest równa zero.

Dla $\omega < \omega_S$ impedancja $Z_S(\omega)$ ma charakter pojemnościowy, a dla $\omega > \omega_S$ ma charakter indukcyjny (rys. 2a). Dla $\omega < \omega_R$ impedancja $Z_R(\omega)$ ma charakter indukcyjny, a dla $\omega > \omega_R$ ma charakter pojemnościowy (rys. 2b).

Składowe prądu o pulsacjach ω_1 i ω_2 są zwierane przez filtr, czyli eliminowane z systemu zasilającego. Impedancja filtra podwójnie nastrojonego dla pulsacji dostrojenia ma być równa zero, czyli $|Z_F|_{\omega_{1,2}} = 0$.

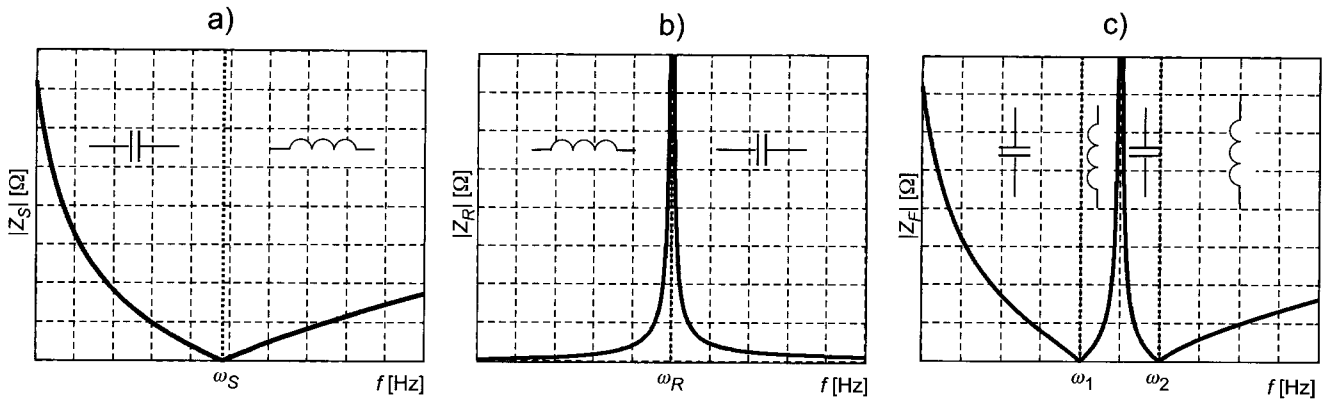
Z równania (8) widać, że impedancja filtra jest równa zero, gdy licznik impedancji jest równy zero.

Stąd równanie do rozwiązania:

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\omega_R^2 + \omega_S^2 \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2} \right) \right] + \omega_S^2 \omega_R^2 = 0 \quad (9)$$

gdzie pierwiastkami są:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_R^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \omega_S^2 \pm \sqrt{\left(\omega_R^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \omega_S^2 \right)^2 - 4\omega_R^2 \omega_S^2}}{2}} \quad (10)$$



Rys. 2. Częstotliwościowe charakterystyki impedancyjne: (a) obwodu szeregowego; (b) obwodu równoległego; (c) filtra podwójnie nastrojonego

Zgodnie ze wzorami Vietta relacja pomiędzy pierwiastkami i współczynnikami równania (9) przyjmuje postać:

$$1. \quad \omega_1 \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_S \omega_R \quad (11)$$

$$2. \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_R^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \omega_S^2 \quad (12)$$

Przekształcając (12) otrzymano zależność łączącą wartości pojemności C_1 i C_2 :

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_R^2}{\omega_S^2} - 1 \quad (13)$$

Drugą cechą filtra, którą należy uwzględnić podczas projektowania, jest dobór mocy biernej filtra, dla harmonicznej podstawowej, wynikającej z potrzeb kompensacji. Jeżeli znana jest wartość mocy, jaką ma kompensować filtr (Q_F), oraz napięcie sieci (U), można skorzystać z zależności:

$$Z_F(\omega_{(1)}) = -j \frac{U^2}{Q_F} \quad (14)$$

gdzie $\omega_{(1)}$ jest częstotliwością harmonicznej podstawowej.

Korzystając z równań (8), (13), (14) otrzymano wzór na C_1 w funkcji napięcia i mocy biernej filtra:

$$C_1 = \left\{ \omega_{(1)} \left(\frac{\omega_R}{\omega_1 \omega_2} \right)^2 - \frac{1}{\omega_{(1)}} + \frac{\omega_{(1)} \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_R^2) \omega_R^2 - \omega_1^2 \omega_2^2 \right]}{\omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_R^2 - \omega_{(1)}^2)} \right\} \frac{U^2}{Q_F} \quad (15)$$

Na podstawie znanych wartości $\omega_1, \omega_2, \omega_R, U$ i Q_F (impedancje filtra dla pulsacji ω_1, ω_2 będą minimalizowane, a dla ω_R maksymalizowane w celu wyeliminowania możliwości rezonansu z siecią) oraz zależności podanych powyżej, można wyznaczyć parametry filtra podwójnie nastrojonego z rysunku 1, przy założeniu, że $R_1 = R_2 = R_3 = 0$.

PRZYKŁAD 1

Dla sieci o parametrach: $S_{zw} = 500$ MVA, $U = 6$ kV, $f_{(1)} = 50$ Hz powinien być zaprojektowany filtr podwójnie nastrojony o parametrach: $f_1 = 250$ Hz, $f_2 = 350$ Hz, $Q_F = 1$ MVar.

Przyjmujemy: $\omega_R = 2\pi 300 = 600\pi \left[\frac{1}{s} \right]$;

$$\omega_S = 2\pi f_{(1)} \frac{35}{6} = \frac{1750}{3} \pi \left[\frac{1}{s} \right]$$

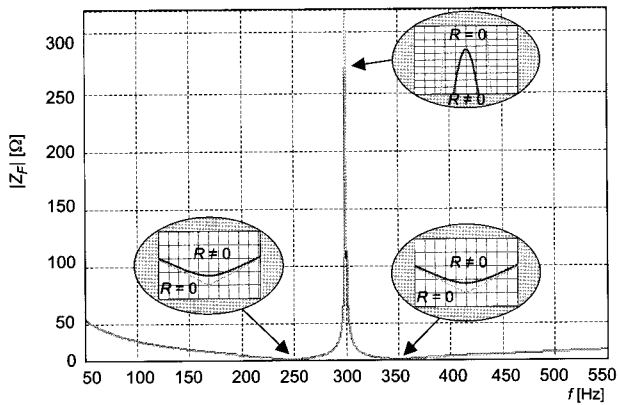
$$C_1 = - \left\{ \frac{\omega_{(1)}}{\omega_S^2} - \frac{1}{\omega_{(1)}} + \frac{\omega_{(1)} (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_R^2 - \omega_S^2)}{\omega_S^2 (\omega_R^2 - \omega_{(1)}^2)} \right\} \frac{Q_F}{U^2} =$$

$$= - \left\{ \frac{2\pi 50}{\left(\frac{1750}{3} \pi \right)^2} - \frac{1}{2\pi 50} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi 50 \left((2\pi 250)^2 + (2\pi 350)^2 - (600\pi)^2 - \left(\frac{1750}{3} \pi \right)^2 \right)}{\left(\frac{1750}{3} \pi \right)^2 \left((600\pi)^2 - (2\pi 50)^2 \right)} \right\} \frac{1000000}{6000^2}$$

$$C_1 = 85,526 \mu\text{F}$$

$$L_1 = \frac{1}{\omega_S^2 C_1} = \frac{1}{\left(\frac{1750}{3} \pi \right)^2 85,53 \cdot 10^{-6}} = 3,48 \text{ mH}$$



Rys. 3. Charakterystyka amplitudowo-fazowa zaprojektowanego filtra dla $R_1 = R_2 = R_3 = 0$ oraz po uwzględnieniu rezystancji zastępczych dławików i kondensatorów

$$C_2 = C_1 \frac{\omega_s^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_R^2 - \omega_s^2} = 85,53 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\left(\frac{1750}{3}\pi\right)^2}{(500\pi)^2 + (700\pi)^2 - (600\pi)^2 - \left(\frac{1750}{3}\pi\right)^2}$$

$$C_2 = 732,65 \mu\text{F}$$

$$L_2 = \frac{1}{\omega_R^2 C_2} = \frac{1}{(600\pi)^2 \cdot 732,69 \cdot 10^{-6}} = 0,384 \text{ mH}$$

Na rysunku 3 pokazano charakterystykę częstotliwościową zaprojektowanego filtra. Pamiętać należy, że filtr był projektowany przy założeniu $R_1 = R_2 = R_3 = 0$, dlatego impedancje dla częstotliwości rezonansowych są równe 0, a impedancja dla częstotliwości rezonansu równoległego dąży do nieskończoności.

Aby uwzględnić rezystancje zastępcze dławików i kondensatorów, należy wyznaczyć ich wartości uwzględniając dobroci tych elementów. Dobroci definiują zależności:

$$q_L = \frac{X_L}{R_L} \quad (16)$$

$$q_C = \frac{X_C}{R_C}$$

gdzie: X_L i X_C — są reaktancjami zastępczymi odpowiednio dławika i kondensatora dla częstotliwości podstawowej.

Na podstawie [11] przyjęto $q_L = 100$ (dławik powietrzny) i $q_C = 5000$, a na podstawie (16) określono wartości rezystancji w części szeregowej i równoległej zaprojektowanego filtra: $R_1 = 18,38 \text{ m}\Omega$, $R_2 = 1,2 \text{ m}\Omega$ i $R_3 = 0,869 \text{ m}\Omega$.

Po uwzględnieniu rezystancji dławików i kondensatorów impedancje dla częstotliwości rezonansowych f_1 i f_2 mają wartości różne od 0, co ogranicza możliwości filtracyjne filtra. Dla częstotliwości f_R wartość impedancji jest ograniczona, w dużym stopniu mniejsza od nieskończoności (rys 3). Dodatkowo rezystancje są powodem występowania strat mocy i mogą być powodem odstrojenia filtra.

W praktycznym układzie prądy płynące przez elementy filtra oraz napięcia panujące na tych elementach mogą prowadzić do stanów awaryjnych. Stąd trzeci etap projektowania filtra, którego celem jest sprawdzenie, czy nie zostały przekroczone znamionowe napięcia i prądy dławików i kondensatorów.

PRZYKŁAD 2

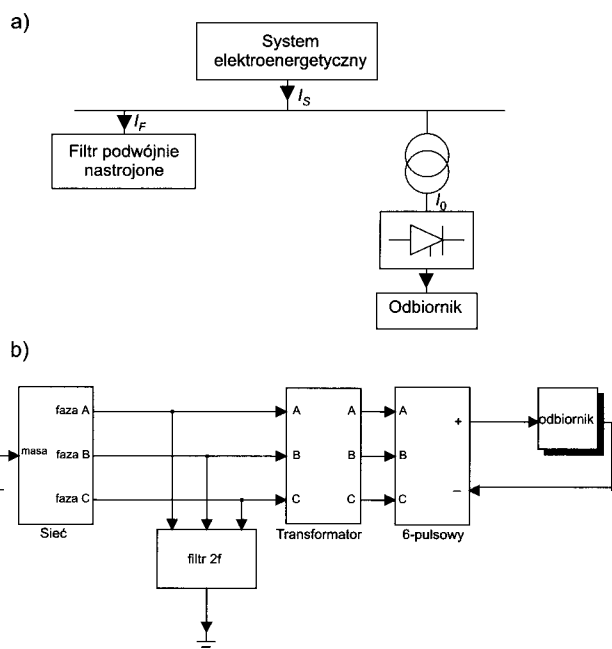
Dla układu jak na rysunku 4 należy zaprojektować filtr podwójnie nastrojony dla 5 i 7 harmonicznej oraz wyznaczyć przebiegi napięć i prądów w systemie przed dołączeniem i po dołączeniu filtra.

Dane sieci elektroenergetycznej: $S_{zw} = 500 \text{ MVA}$, $U = 6 \text{ kV}$
Dane transformatora: $S_N = 10 \text{ MVA}$, $e\% = 6\%$, $U_2 = 3,3 \text{ kV}$

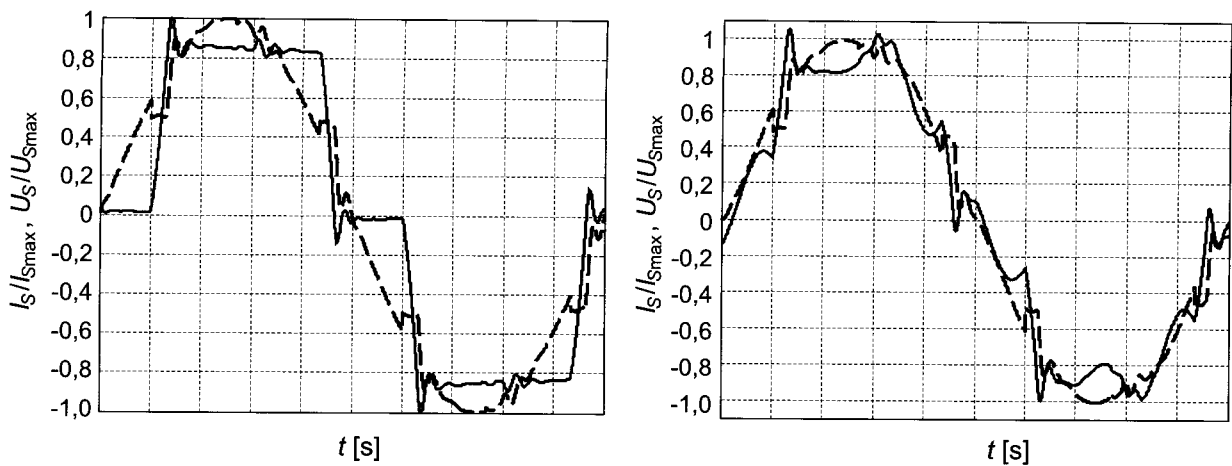
Odbiornik jest zasilany z 6-pulsowego sterowanego fazowo przekształtnika tyrystorowego. Układ taki jest źródłem wyższych harmonicznych, wymaga również kompensacji mocy biernej. Układ bez filtra dla określonego stałego punktu pracy charakteryzuje się współczynnikiem zawartości harmonicznych prądu w sieci THD = 27,19% oraz wartością przesunięcia fazowego pierwszych harmonicznych prądu i napięcia w sieci $\varphi_{(1)} = 10,9^\circ$.

Korzystając ze wzorów jak w przykładzie 1, wyliczono parametry filtra:

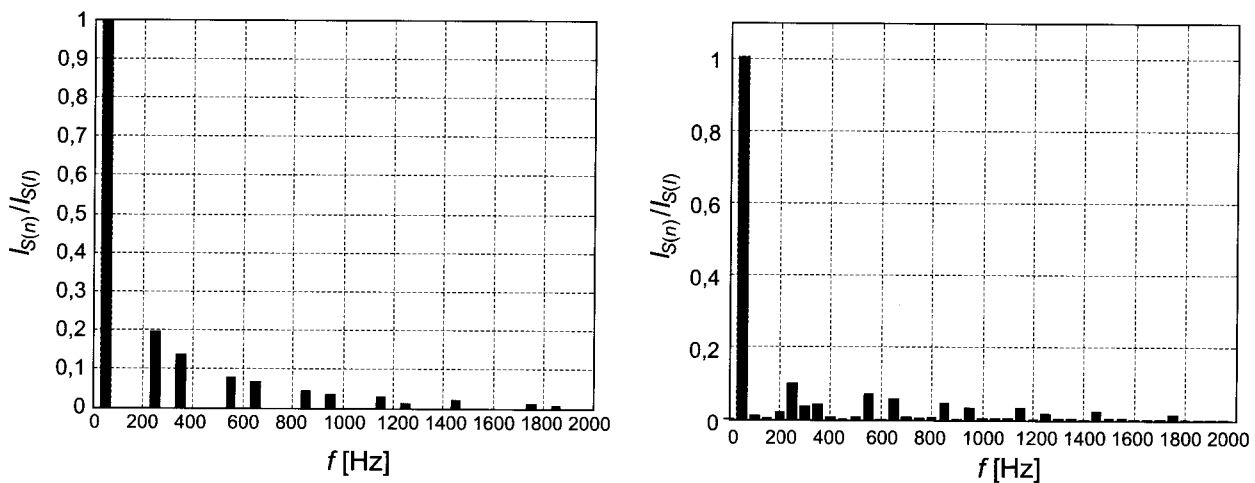
$$\begin{aligned} C_1 &= 85,526 \mu\text{F} & L_1 &= 3,48 \text{ mH} \\ C_2 &= 732,65 \mu\text{F} & L_2 &= 0,384 \text{ mH} \\ R_1 &= 18,38 \text{ m}\Omega & R_2 &= 1,2 \text{ m}\Omega & R_3 &= 0,869 \text{ m}\Omega \end{aligned}$$



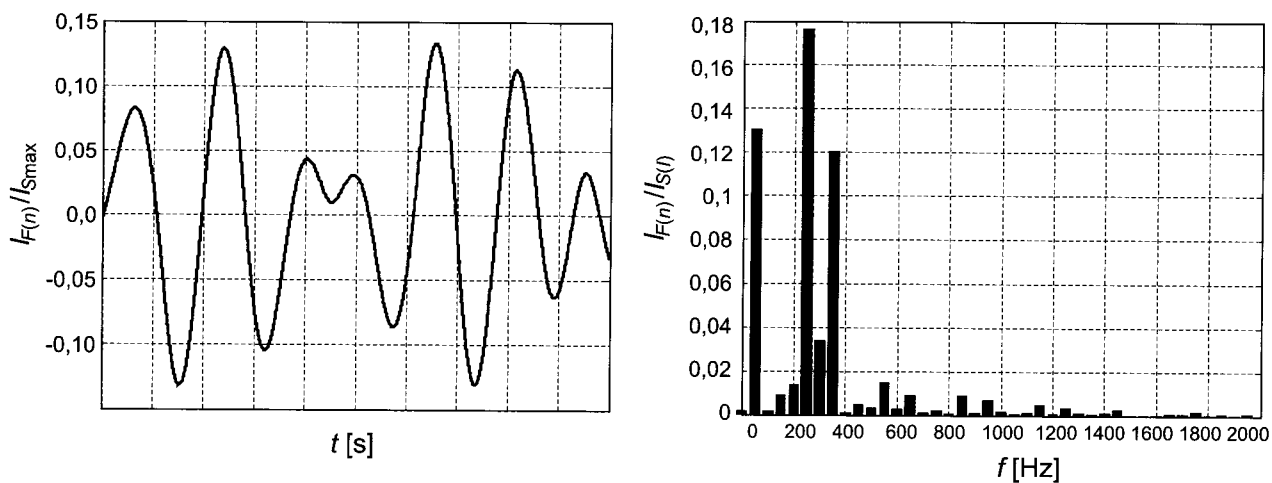
Rys. 4. Schemat ideowy (a) i schemat symulinkowy (b) systemu z filtrem podwójnie nastrojonym



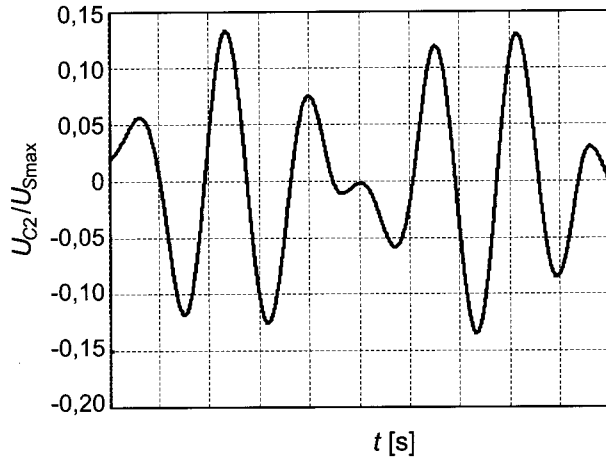
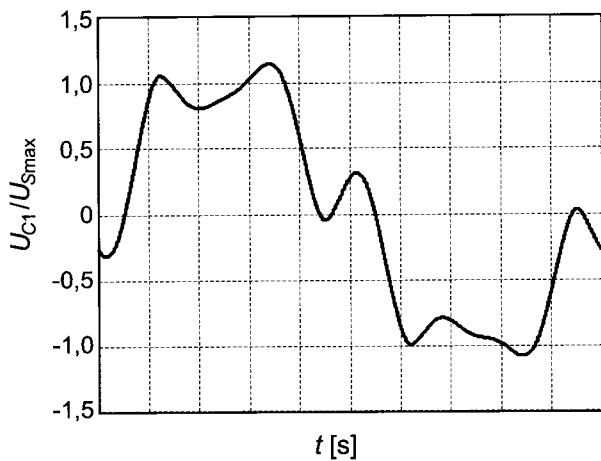
Rys. 5. Prąd i napięcie sieci przed dołączeniem i po dołączeniu filtra podwójnie nastrojonego



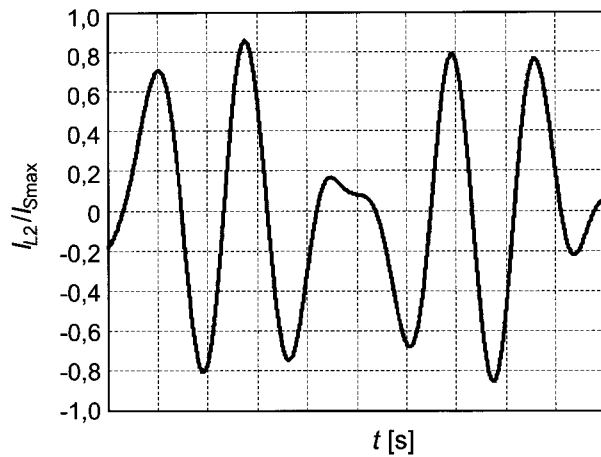
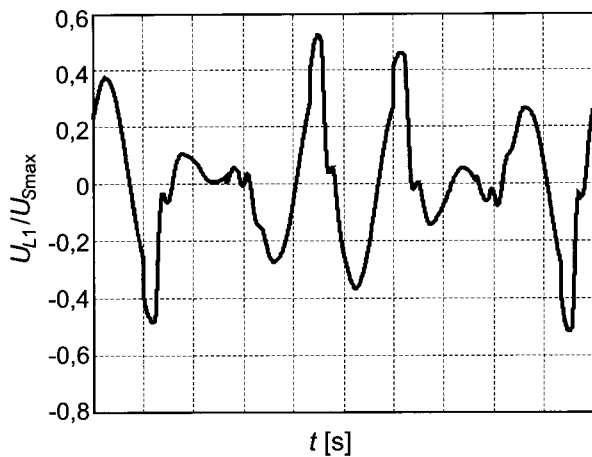
Rys. 6. Rozkład Fouriera prądu sieci przed dołączeniem i po dołączeniu filtra podwójnie nastrojonego



Rys. 7. Prąd filtru oraz jego widmo



Rys. 8. Wykresy napięć na kondensatorach C_1 i C_2



Rys. 9. Napięcie na indukcyjności L_1 (napięcie na indukcyjności L_2 jest takie jak napięcie na kondensatorze C_2) oraz prąd płynący przez indukcyjność L_2 (prąd płynący przez indukcyjności L_1 jest taki sam jak prąd filtru)

Dla tak zaprojektowanego filtra podwójnie nastrojonego można porównać przebiegi prądowe i napięciowe dla systemu bez filtru i z filtrem.

Po dołączeniu filtra współczynnik THD prądu w sieci zmniejszył się do wartości 12,5%, a kąt przesunięcia dla podstawowej harmonicznej przyjął wartość $\varphi_{(1)} = 1^\circ$.

— Przebieg prądu był bardziej zbliżony do sinusoidy.

— 5 i 7 harmoniczna prądu sieci zostały znacząco zredukowane przy jednoczesnej minimalnej zmianie wartości podstawowej harmonicznej.

— Pojawiła się 6 harmoniczna powstała na skutek rezonansu filtru z siecią.

— Kondensator C_1 powinien być projektowany na napięcie około $1,5 U_{Smax}$ lub inaczej $2U_S$.

PRZYKŁAD 3

Dla układu z przykładu 2 należy zbadać wpływ dobroci cewek i kondensatorów na współczynnik zawartości harmonicznego prądu THD w sieci po dołączeniu filtra podwójnie nastrojonego zaprojektowanego w przykładzie 2.

Na rysunku 10 pokazano wykresy zależności współczynnika zawartości harmonicznego prądu THD od wartości współczynników dobroci cewek i kondensatorów. Poprzez

odpowiedni dobór dobroci cewek i kondensatorów można polepszyć współczynnik THD prądu sieci.

PRZYKŁAD 4

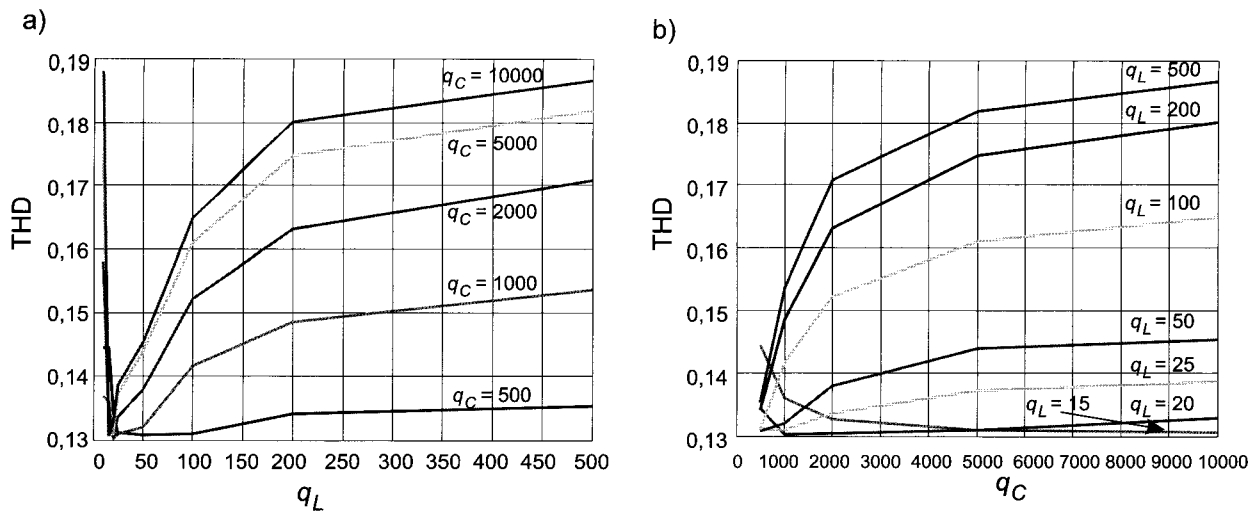
Dla układu z przykładu 2 należy zaprojektować dwa filtry proste dla 5 i 7 harmonicznej oraz wyznaczyć przebiegi napięć i prądów w systemie po dołączeniu filtru.

Dla pulsacji podstawowej prawdziwe są zależności:

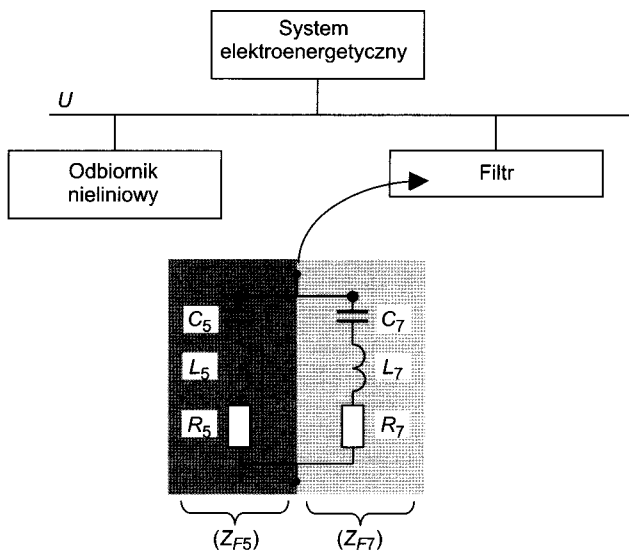
$$Z_{Fn} = -j \frac{U^2}{Q_{Zn}} \Rightarrow jX_{Ln} - jX_{Cn} =$$

$$= -j(X_{Cn} - X_{Ln}) = -j \frac{U^2}{Q_{Zn}} \Rightarrow X_{Cn} - X_{Ln} = \frac{U^2}{Q_{Zn}} \quad (17)$$

$$\frac{1}{2\pi 50 C_n} - 2\pi 50 L_n = \frac{U^2}{Q_{Zn}} \quad (18)$$



Rys. 10. Wykresy zależności wartości współczynnika THD prądu sieci od wartości a) dobroci cewek, b) dobroci kondensatorów



Rys. 11. Dwa filtry proste 5 i 7 harmonicznej w systemie elektroenergetycznym

Z zależności na pulsację rezonansową filtra n . harmonicznej wyznacza się indukcyjność cewki filtru:

$$L_n = \frac{1}{\omega_{(n)}^2 C_n} = \frac{1}{4\pi^2 n^2 50^2 C_n} \quad (19)$$

Podstawiając (19) do (18), wyznaczyć można zależność na pojemność kondensatora filtru:

$$\frac{1}{2\pi 50 C_n} - \frac{1}{2\pi n^2 50 C_n} = \frac{U^2}{Q_{Zn}} \Rightarrow C_n = \frac{1}{2\pi 50} \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{Q_{Zn}}{U^2} \quad (20)$$

Pozostaje określić moce poszczególnych filtrów. Należy zaprojektować filtr o całkowitej mocy 1MVA, czyli:

$$\sum_n Q_{Zn} = Q_F \quad (21)$$

Jeżeli nie znamy widma prądu sieci, można założyć, że zawartość n -tej harmonicznej prądu w prądzie sieci jest proporcjonalna do wskaźnika harmonicznej, czyli n .

$$n_k Q_{Zn_k} = n_m Q_{Zn_m} \quad (22)$$

Rozwiązując układ równań (21 i 22) dla $n_k = 5$ oraz $n_m = 7$, otrzymano zależności:

$$Q_{Z5} = \frac{7}{12} Q_F \quad (23)$$

$$Q_{Z7} = \frac{5}{12} Q_F$$

Korzystając ze wzorów (19), (20) oraz (23) możliwe jest wyznaczenie parametrów dwóch filtrów prostych dla 5 i 7 harmonicznej.

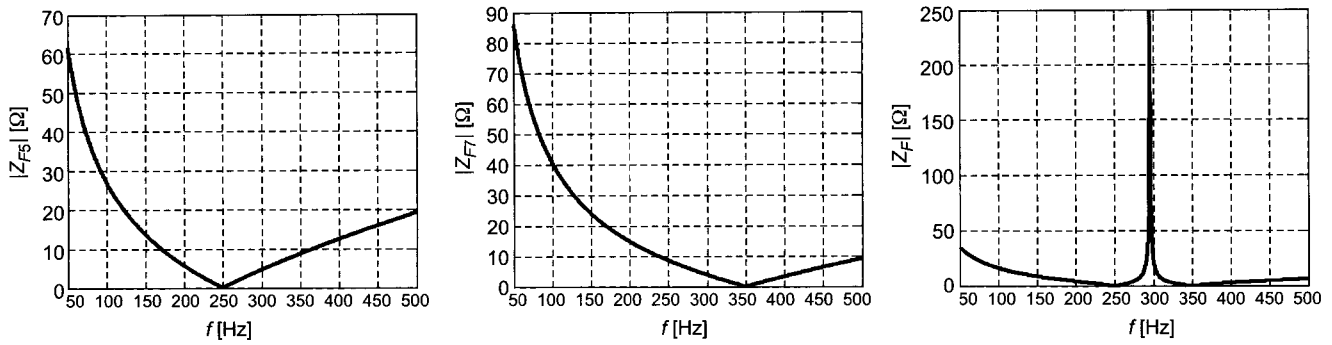
$$C_5 = 49,52 \text{ mF}, \quad C_7 = 36,09 \text{ mF}$$

$$L_5 = 8,185 \text{ mH}, \quad L_7 = 5,73 \text{ mH}$$

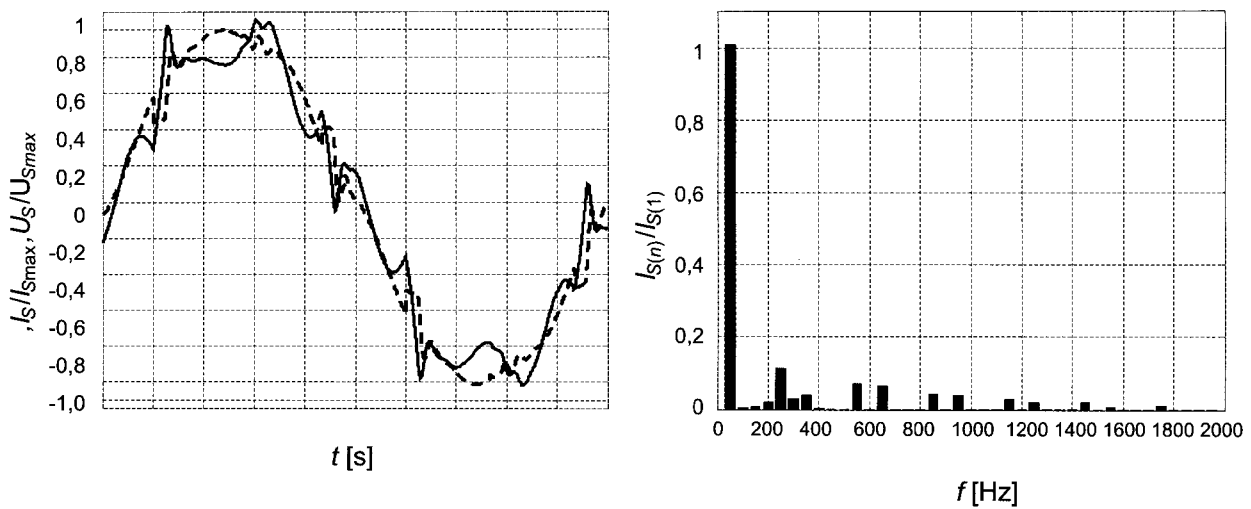
Nie ma elementów idealnych, więc należy pamiętać o ich dobroci. Zależność (16) pozwala wyznaczyć rezystancje zastępcze elementów. Przy założeniu, że $q_L = 100$ i $q_C = 5000$:

$$R_5 = 38,57 \text{ m}\Omega, \quad R_7 = 35,64 \text{ m}\Omega$$

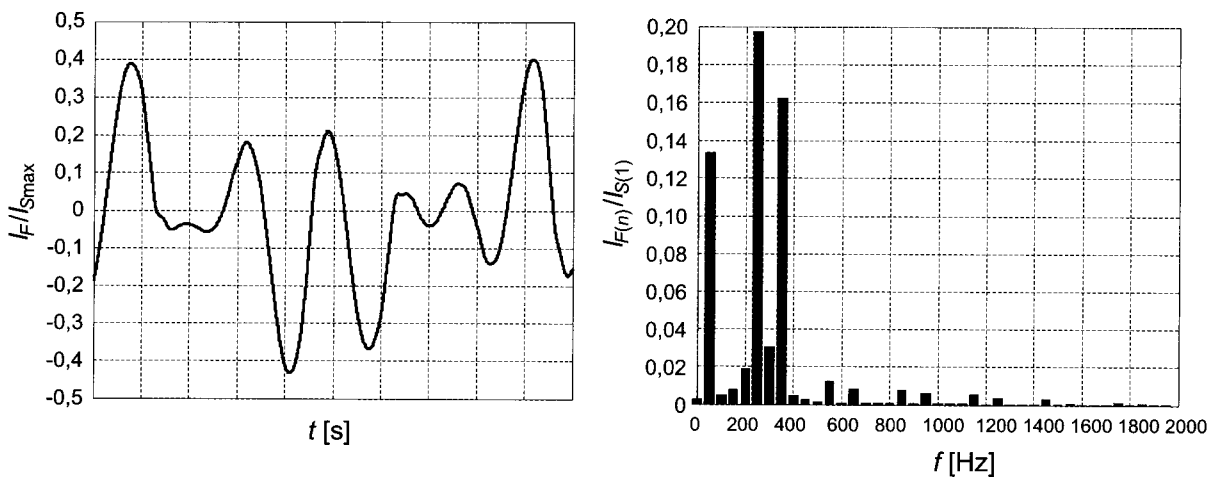
Na rysunku 12 pokazano wykresy impedancji poszczególnych filtrów oraz impedancji wypadkowej w funkcji częstotliwości.



Rys. 12. Charakterystyki częstotliwościowe zaprojektowanych filtrów prostych oraz filtra wypadkowego



Rys.13. Prąd i napięcie sieci po załączeniu filtrów oraz rozkład Fouriera prądu sieci



Rys. 14. Suma prądów filtrów oraz jego widmo

Rysunki 13–16 przedstawiają przebiegi prądu i napięcie w systemie elektroenergetycznym po dołączeniu dwóch filtrów prostych 5 i 7 harmonicznej.

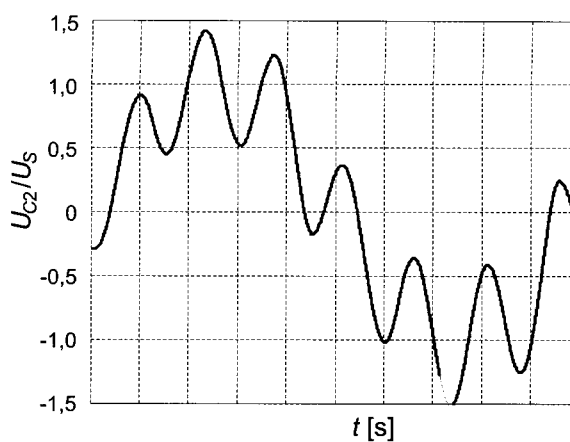
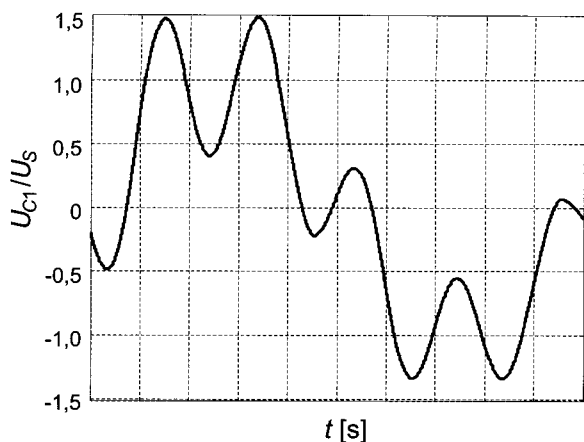
Po dołączeniu filtrów współczynnik THD prądu w sieci zmniejszył się do wartości 12,46%, a kąt przesunięcia dla podstawowej harmonicznej przyjął wartość $\varphi_{(1)} = 1^\circ$.

— Przebieg prądu stał się bardziej zbliżony do sinusoidy.
— 5 i 7 harmoniczna prądu sieci zostały znacząco zredukowa-

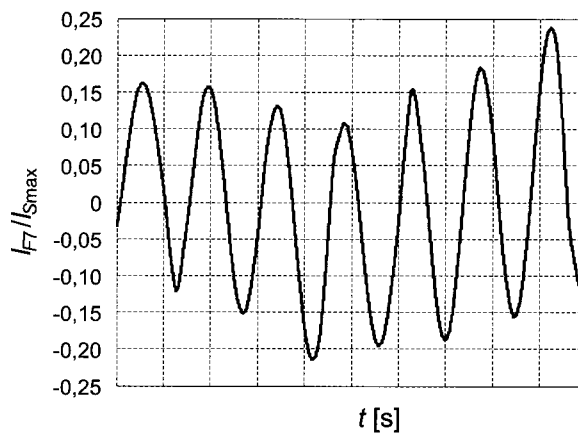
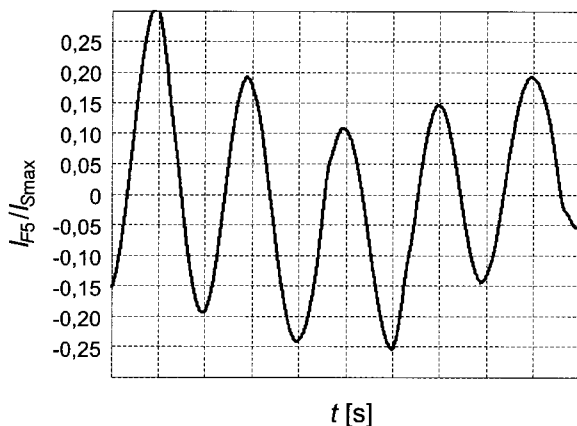
ne (nie tak bardzo jak z użyciem filtra podwójnie nastrojonego) przy jednoczesnej minimalnej zmianie wartości podstawowej harmonicznej.

— Pojawiła się 6 harmoniczna powstała na skutek rezonansu filtru z siecią.

— Oba kondensatory C_1 i C_2 powinny być projektowane na napięcie ok. $1,5 U_{Smax}$ lub $2U_S$.



Rys. 15. Napięcia na kondensatorach w poszczególnych filtrach



Rys. 16. Prądy w poszczególnych filtrach

2. FILTR REZONANSOWY PODWÓJNIE NASTROJONY — ALTERNATYWNE KONFIGURACJE

Często układ klasyczny filtra podwójnie nastrojonego z rys. 1 zastępowany jest jedną z sześciu alternatywnych struktur filtrów tłumionych podwójnie nastrojonych przedstawionych na rys 17. Układy te mają różne właściwości filtracyjne oraz charakteryzują się różnymi stratami mocy dla harmonicznej podstawowej.

Analiza częstotliwościowa układów z rysunku 17 nie jest prosta, dlatego rezystancje wynikające z dobroci elementów biernych będą pominięte. Dla każdej ze struktur filtrów podwójnie nastrojonych zostaną wyprowadzone zależności pozwalające analizować własności częstotliwościowe filtrów.

Układ 17a

Impedancja części równoległej:

$$Z_R = -j \frac{\omega L_2 R_2}{(\omega^2 L_2 C_2 - 1) R_2 - j \omega L_2} \quad (24)$$

pulsacja rezonansowa części równoległej:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (25)$$

stąd:

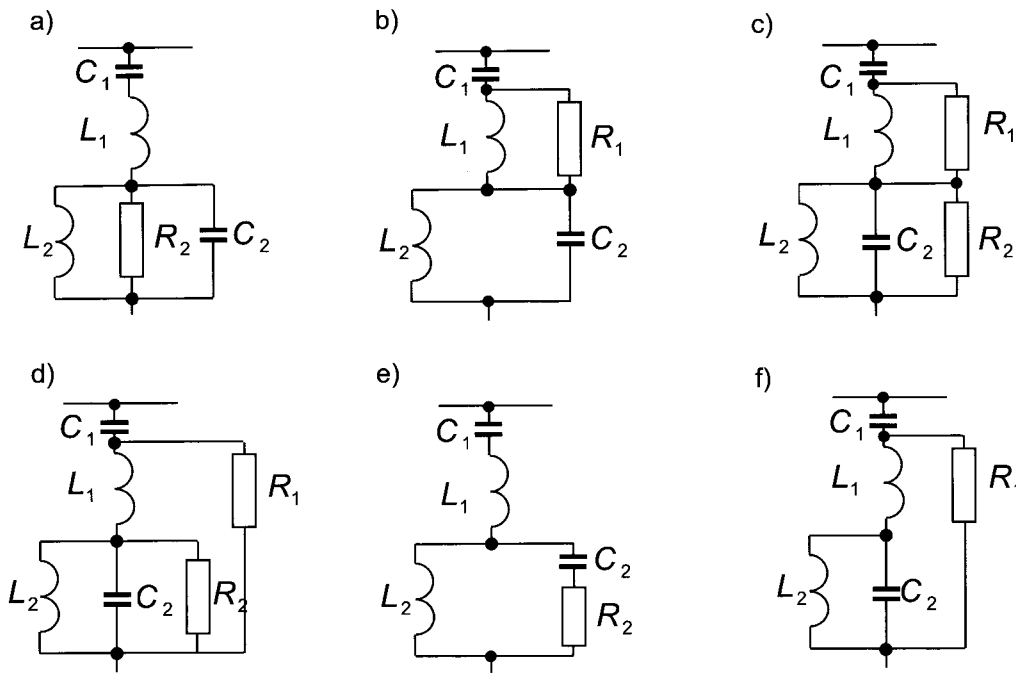
$$L_2 = \frac{1}{\omega_R^2 C_2} \quad (26)$$

Podstawiając (26) do (24) otrzymujemy:

$$Z_R = -j \frac{\omega R_2}{R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j \omega} \quad (27)$$

Impedancja części szeregowej:

$$Z_S = j \omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = j \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega C_1} \quad (28)$$



Rys. 17. Różne struktury filtrów tłumionych podwójnie nastrojonych

pulsacja rezonansowa części szeregowej:

$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (29)$$

stąd:

$$L_1 = \frac{1}{\omega_S^2 C_1} \quad (30)$$

Podstawiając (30) do (28) otrzymujemy:

$$Z_S = j \frac{\omega^2 - \omega_S^2}{\omega_S^2 C_1 \omega} \quad (31)$$

Impedancja całego filtru:

$$Z_F = Z_S + Z_R \quad (32)$$

$$Z_F = \frac{\omega(\omega^2 - \omega_S^2) + jR_2 C_2 \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\omega_R^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \omega_S^2 \right) + \omega_R^2 \omega_S^2 \right]}{(R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j\omega) \omega C_1 \omega_S^2} \quad (33)$$

stąd równanie:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\omega_R^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \omega_S^2 \right) + \omega_R^2 \omega_S^2 = 0 \quad (34)$$

którego rozwiązaniem są pulsacje:

$$\omega_{A,B} = \sqrt{\frac{\omega_R^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \omega_S^2 \pm \sqrt{\left(\omega_R^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \omega_S^2 \right)^2 - 4\omega_R^2 \omega_S^2}}{2}} \quad (35)$$

Podstawiając (35) do (33) otrzymujemy:

$$Z_F = \frac{\omega R_2 C_2 \left[(\omega^2 - \omega_S^2)(\omega^2 - \omega_R^2) - (\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_B^2) \right]}{\omega C_1 \omega_S^2 \left[R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 \right]} + j \frac{R_2^2 C_2^2 \left[(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_B^2)(\omega^2 - \omega_R^2) + \frac{\omega^2}{R_2^2 C_2^2} (\omega^2 - \omega_S^2) \right]}{\omega C_1 \omega_S^2 \left[R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 \right]} \quad (36)$$

dla pulsacji rezonansowych filtru część urojona będzie równa zero:

$$\omega^6 - \omega^4 \left(\omega_A^2 + \omega_B^2 + \omega_R^2 + \frac{1}{R_2^2 C_2^2} \right) + \omega^2 \left(\omega_A^2 \omega_B^2 + \omega_B^2 \omega_R^2 + \omega_R^2 \omega_A^2 - \frac{\omega_S^2}{R_2^2 C_2^2} \right) - \omega_A^2 \omega_B^2 \omega_R^2 = 0 \quad (37)$$

Ze wzorów Vietta:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 &= \omega_A^2 + \omega_B^2 + \omega_R^2 + \frac{1}{R_2^2 C_2^2} = \\ 1. \quad &= \omega_R^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} \omega_S^2 + \omega_R^2 + \frac{1}{R_2^2 C_2^2} \end{aligned} \quad (38)$$

$$2. \quad \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 = \omega_A^2 \omega_B^2 \omega_R^2 = \frac{1}{L_1 C_1 L_2^2 C_2^2} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_3^2 \omega_1^2 &= \\ 3. \quad &= \omega_A^2 \omega_B^2 + \omega_B^2 \omega_R^2 + \omega_R^2 \omega_A^2 - \frac{\omega_S^2}{R_2^2 C_2^2} \end{aligned} \quad (40)$$

Z mocy filtru:

$$\text{imag}(Z_F) = -j \frac{U^2}{Q_F} \quad (41)$$

czyli:

$$\frac{j R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega C_1 \omega_S^2 \left[R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 \right]} = -j \frac{U^2}{Q_F} \quad (42)$$

Analiza układu się upraszcza, jeżeli $R_2 \gg \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}$. Wtedy

$\omega_1 = \omega_A$, $\omega_2 = \omega_R$ oraz $\omega_3 = \omega_B$. Na rysunku 18 przedstawiono przykładowe charakterystyki impedancji filtru z rys. 17a dla stałych wartości L_1 , L_2 , C_1 i C_2 , przy zmianach wartości parametru R_2 .

Układ 17a w części równoległej posiada dodatkowo rezystor, który dla częstotliwości ω_R ogranicza impedancję filtru. Rezystor ten ogranicza prąd płynący przez część równoległą filtru, jak również zmniejszone jest napięcie w tej części filtru oraz zwiększa tłumienie przebiegów podczas stanów przejściowych.

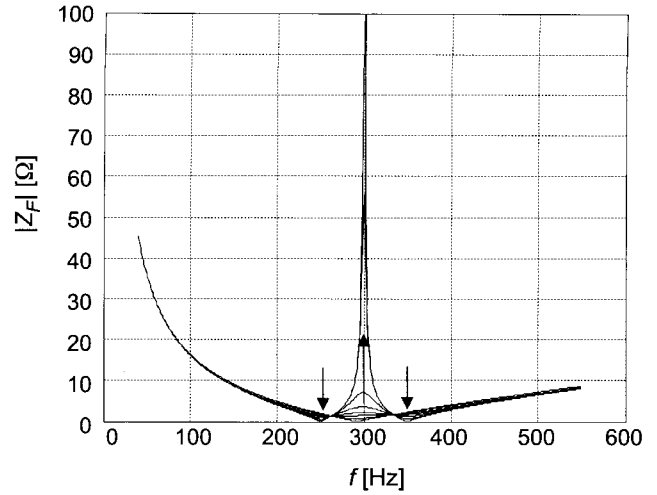
Układ 17b

Impedancja części równoległej:

$$Z_R = \frac{j\omega L_2 \left(-j \frac{1}{\omega C_2} \right)}{j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2}} = -j \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1} \quad (43)$$

pulsacja rezonansowa:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (44)$$



Rys. 18. Przykładowe charakterystyki filtru podwójnie nastrojonego z rys. 17a, dla różnych wartości R_2

stąd:

$$L_2 = \frac{1}{\omega_R^2 C_2} \quad (45)$$

Podstawiając (45) do (43) otrzymujemy:

$$Z_R = -j \frac{\omega}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)} \quad (46)$$

Impedancja części szeregowej:

$$Z_S = \frac{j\omega L_1 R_1}{R_1 + j\omega L_1} - j \frac{1}{\omega C_1} = \frac{\omega L_1 + j R_1 (\omega^2 L_1 C_1 - 1)}{(R_1 + j\omega L_1) \omega C_1} \quad (47)$$

Jeżeli przyjmiemy, że:

$$\omega_A^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad (48)$$

to wstawiając (48) do (47), po przekształceniu otrzymamy:

$$Z_S = \frac{\omega^3 R_1 C_1 + j \left[\omega^2 (R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) - R_1^2 C_1^2 \omega_A^4 \right]}{\omega C_1 (\omega_A^4 R_1^2 C_1^2 + \omega^2)} \quad (49)$$

Część urojona zeruje się dla:

$$\omega_S^2 = \frac{R_1^2 C_1^2 \omega_A^4}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} \quad (50)$$

stąd:

$$\omega_A^2 = \frac{\omega_S}{2} \left(\omega_S \pm \sqrt{\omega_S^2 - \frac{4}{R_1^2 C_1^2}} \right) \quad (51)$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być większe lub równe 0, dlatego:

$$R_1 \geq \frac{2}{\omega_S C_1} \quad (52)$$

Wstawiając (50) do (49) otrzymamy:

$$Z_S = \frac{\omega^3 \frac{R_1 C_1}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} + j(\omega^2 - \omega_S^2)}{\omega C_1 \left(\omega_S^2 + \frac{\omega^2}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} \right)} \quad (53)$$

Impedancja filtru:

$$Z_F = \frac{\omega^3 \frac{R_1 C_1}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} + j(\omega^2 - \omega_S^2)}{\omega C_1 \left(\omega_S^2 + \frac{\omega^2}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} \right)} - j \frac{\omega}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)} \quad (54)$$

skąd otrzymano równanie:

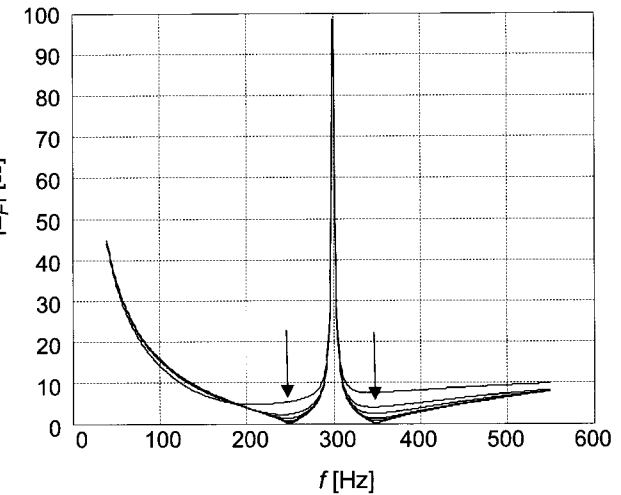
$$\omega^4 - \omega^2 \left(\omega_R^2 + \omega_S^2 \frac{C_1 + C_2}{C_2} \right) \frac{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2}{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2 - C_1} + \omega_R^2 \omega_S^2 \frac{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2}{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2 - C_1} = 0 \quad (55)$$

Ze wzorów Vietta:

$$1. \omega_1^2 + \omega_2^2 = \left(\omega_R^2 + \omega_S^2 \frac{C_1 + C_2}{C_2} \right) \frac{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2}{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2 - C_1} \quad (56)$$

$$2. \omega_1^2 \omega_2^2 = \omega_R^2 \omega_S^2 \frac{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2}{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2 - C_1} \quad (57)$$

Z mocy filtru:



Rys. 19. Przykładowe charakterystyki układu 17 b dla różnych wartości R_1

$$j \frac{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) C_2 - C_1}{(R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1)} \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega C_1 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) \left(\omega_S^2 + \frac{\omega^2}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} \right)} = -j \frac{U^2}{Q_F} \quad (58)$$

Na rysunku 19 pokazano przykładowe charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe układu z rys. 17 b dla różnych parametrów R_1 .

Układ 17b ma rezystor bocznikujący dławik w części szeregowej. Rezystor ten może powodować przesunięcie pulsacji rezonansowej, gdy jego wartość będzie zbyt mała. Powinien

spełniać warunki: $R_1 \geq \frac{2}{\omega_S C_1}$ oraz $R_1 > \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$. Rezystor ten ogranicza prąd płynący przez dławik L_1 .

Układ 17c

Impedancja części szeregowej:

$$Z_S = \frac{j\omega L_1 R_1}{R_1 + j\omega L_1} - j \frac{1}{\omega C_1} = \frac{\omega L_1 + jR_1 (\omega^2 L_1 C_1 - 1)}{(R_1 + j\omega L_1) \omega C_1} \quad (59)$$

Jeżeli:

$$\omega_A^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad (60)$$

to wstawiając (60) do (59), po przekształceniu otrzymujemy:

$$Z_S = \frac{\omega^3 R_1 C_1 + j \left[\omega^2 (R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1) - R_1^2 C_1^2 \omega_A^4 \right]}{\omega C_1 (R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 + \omega^2)} \quad (61)$$

Część urojona zeruje się dla:

$$\omega_S^2 = \frac{R_1^2 C_1^2 \omega_A^4}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} \quad (62) \quad Z_F = \frac{\omega^3 \omega_S^2 \left[R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 + R_2 (R_1 C_1^2 \omega_A^4 + \omega^2) \right]}{\omega C_1 \left(\omega_S^2 + \frac{\omega^2}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} \right) \left(R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 \right)}$$

stąd:

$$\omega_A^2 = \frac{\omega_S}{2} \left(\omega_S \pm \sqrt{\omega_S^2 - \frac{4}{R_1^2 C_1^2}} \right) \quad (63) \quad + j \frac{R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) (\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega C_1 \omega_S^2 (1 + R_1^2 C_1^2 \omega_A^4 \omega^2) \left(R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 \right)}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być większe lub równe 0, dlatego:

$$R_1 \geq \frac{2}{\omega_S C_1} \quad (64)$$

Wstawiając (62) do (61) otrzymamy:

$$Z_S = \frac{\omega^3 \frac{R_1 C_1}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} + j(\omega^2 - \omega_S^2)}{\omega C_1 \left(\omega_S^2 + \frac{\omega^2}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} \right)} \quad (65)$$

Impedancja części równoległej:

$$Z_R = -j \frac{\omega L_2 R_2}{(\omega^2 L_2 C_2 - 1) R_2 - j \omega L_2} \quad (66)$$

pulsacja rezonansowa części równoległej:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (67)$$

stąd:

$$L_2 = \frac{1}{\omega_R^2 C_2} \quad (68)$$

Podstawiając (68) do (66) otrzymujemy:

$$Z_R = -j \frac{\omega R_2}{R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j \omega} \quad (69)$$

Impedancja filtru:

$$Z_F = \frac{\omega^3 \frac{R_1 C_1}{R_1^2 C_1^2 \omega_A^2 - 1} + j(\omega^2 - \omega_S^2)}{\omega C_1 \omega_S^2 (1 + R_1^2 C_1^2 \omega_A^4 \omega^2)} + \frac{\omega^2 R_2 - j \omega R_2^2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)}{R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2} \quad (70)$$

Skąd otrzymano równanie:

$$\omega^6 - \omega^4 \left(2\omega_R^2 + \omega_S^2 \frac{C_1 + C_2}{C_2} - \frac{\omega_S^2 \omega_R^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} - \frac{1}{R_2^2 C_2^2} \right) / \left(1 - \frac{\omega_S^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} \right) + \omega^2 \left(\omega_R^4 + \omega_S^2 \omega_R^2 \frac{2C_2 + C_1}{C_2} - \frac{\omega_S^2}{R_2^2 C_2^2} \right) / \left(1 - \frac{\omega_S^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} \right) - \omega_S^2 \omega_R^4 / \left(1 - \frac{\omega_S^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} \right) = 0 \quad (72)$$

Ze wzorów Vietty:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \left(2\omega_R^2 + \omega_S^2 \frac{C_1 + C_2}{C_2} - \frac{\omega_S^2 \omega_R^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} - \frac{1}{R_2^2 C_2^2} \right) / \left(1 - \frac{\omega_S^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} \right) \quad (73)$$

1.

$$\left(1 - \frac{\omega_S^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} \right)$$

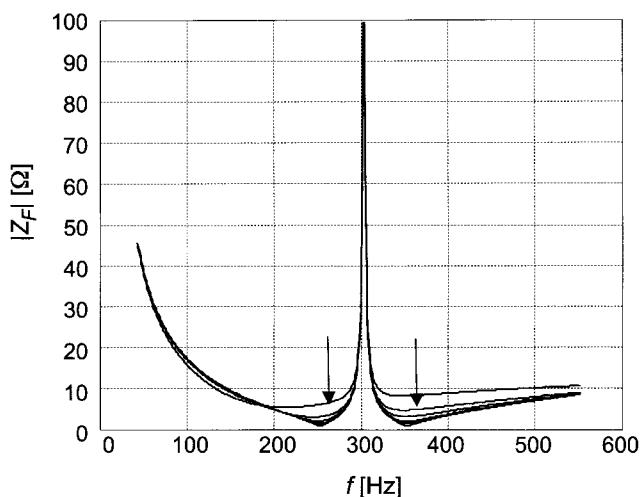
2.

$$\left(\omega_R^4 + \omega_S^2 \omega_R^2 \frac{2C_2 + C_1}{C_2} - \frac{\omega_S^2}{R_2^2 C_2^2} \right) / \left(1 - \frac{\omega_S^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} \right) \quad (74)$$

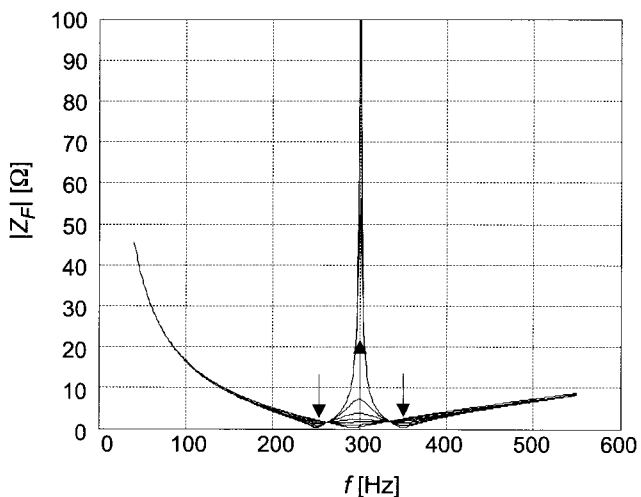
$$3. \quad \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 = \omega_S^2 \omega_R^4 / \left(1 - \frac{\omega_S^2}{R_1^2 C_1 C_2 \omega_A^4} \right) \quad (75)$$

Z mocy filtru:

$$j \frac{R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) (\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega C_1 \omega_S^2 (1 + R_1^2 C_1^2 \omega_A^4 \omega^2) \left(R_2^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 \right)} = -j \frac{U^2}{Q_F} \quad (76)$$



Rys. 20. Przykładowe charakterystyki układu 17c przy zmianie wartości R_1



Rys. 21. Przykładowe charakterystyki układu 17c przy zmianie wartości R_2

Na rysunkach 20 i 21 pokazano charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe układu 17c dla różnych wartości rezystancji R_1 oraz R_2 .

Układ 17c ma dodatkowe rezystancje w części szeregowej (tak jak układ 17b) i równoległej (jak układ 17a). Rezystancja w części równoległej ogranicza prąd płynący przez tę część filtra, jak również zwiększa tłumienie przebiegów podczas stanów przejściowych. Rezystancja w części szeregowej ogranicza napięcie i prąd indukcyjności L_1 .

Układ 17d

Impedancja części równoległej:

$$Z_R = -j \frac{\omega L_2 R_2}{(\omega^2 L_2 C_2 - 1) R_2 - j \omega L_2} \quad (77)$$

pulsacja rezonansowa części równoległej:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (78)$$

stąd:

$$L_2 = \frac{1}{\omega_R^2 C_2} \quad (79)$$

Podstawiając (79) do (77) otrzymamy:

$$Z_R = -j \frac{\omega R_2}{R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j \omega} \quad (80)$$

Dodając indukcyjność L_1 :

$$Z_a = -j \frac{\omega R_2}{R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j \omega} + j \omega L_1 \quad (81)$$

$$Z_a = \frac{\omega^2 L_1 + j \omega R_2 [L_1 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - 1]}{R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j \omega} \quad (82)$$

Jeżeli:

$$\omega_a^2 = \omega_R^2 + \frac{1}{L_1 C_2} \quad (83)$$

to:

$$Z_a = \frac{\omega^2 L_1 + j \omega R_2 L_1 C_2 (\omega^2 - \omega_a^2)}{R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j \omega} \quad (84)$$

Połączenie równoległe Z_a i R_1 :

$$Z_b = \frac{\frac{\omega^2 L_1 + j \omega R_2 L_1 C_2 (\omega^2 - \omega_a^2)}{R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j \omega} R_1}{R_1 + \frac{\omega^2 L_1 + j \omega R_2 L_1 C_2 (\omega^2 - \omega_a^2)}{R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - j \omega}} \quad (85)$$

$$Z_b = \frac{\omega^2 R_1 L_1 + j \omega R_1 L_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_a^2)}{\omega^2 L_1 + R_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) + j \omega [R_2 C_2 L_1 (\omega^2 - \omega_a^2) - R_1]} \quad (86)$$

Impedancja całego filtra:

$$Z_F = \frac{\omega^2 R_1 L_1 + j \omega R_1 L_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_a^2)}{\omega^2 L_1 + R_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) + j \omega [R_2 C_2 L_1 (\omega^2 - \omega_a^2) - R_1]} - j \frac{1}{\omega C_1} \quad (87)$$

$$Z_F = \frac{\omega \left[\omega^2 L_1 C_1 R_1 + R_2 C_2 L_1 (\omega^2 - \omega_a^2) - R_1 \right] + \omega C_1 \left(\omega^2 L_1 + R_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) + j \omega \left[R_2 C_2 L_1 (\omega^2 - \omega_a^2) - R_1 \right] \right)}{\omega^2 R_1 L_1 C_1 R_2 C_2 - \omega^2 L_1 - R_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)} + j \frac{\omega^2 R_1 L_1 C_1 R_2 C_2 - \omega^2 L_1 - R_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)}{\omega C_1 \left(\omega^2 L_1 + R_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) + j \omega \left[R_2 C_2 L_1 (\omega^2 - \omega_a^2) - R_1 \right] \right)} \quad (88)$$

stąd równanie:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\omega_R^2 + \frac{1}{L_1} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) + \omega_R^2 \frac{1}{L_1 C_1} = 0 \quad (89)$$

Jeżeli:

$$\omega_S^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad (90)$$

to:

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\omega_R^2 + \omega_S^2 \frac{C_1 + C_2}{C_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) + \omega_R^2 \omega_S^2 = 0 \quad (91)$$

$$\omega_B^2 \omega_C^2 = \omega_R^2 \omega_S^2 \quad (92)$$

$$\omega_B^2 + \omega_C^2 = \omega_R^2 + \omega_S^2 \frac{C_1 + C_2}{C_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (93)$$

oraz:

(94)

$$Z_F = \frac{\omega \left[R_1 C_1 (\omega^2 - \omega_S^2) + R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_a^2) \right] + j R_1 C_1 R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega C_1 \left(\omega^2 + R_1 R_2 C_2 C_1 \omega_S^2 (\omega^2 - \omega_R^2) + j \omega \left[R_2 C_2 (\omega^2 - \omega_a^2) - R_1 C_1 \omega_S^2 \right] \right)}$$

$$\begin{aligned} & \omega^6 R_2 C_2 \left(R_1 C_1 \omega_S^2 - \frac{1}{R_1 C_1} \right) + \omega^4 \left[2 \omega_R^2 R_2 C_2 \left(R_1 C_1 \omega_S^2 - \frac{1}{R_1 C_1} \right) - \right. \\ & \left. - \omega_S^2 \left(R_1 C_1 R_2 C_2 - 2 \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} + C_1^2 R_1 R_2 \right) + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2} \right] - \\ & - \omega^2 \left[\omega_S^4 \left(2 C_1 R_1 C_2 R_2 \omega_R^2 - 2 - \frac{R_1}{R_2} - \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} + C_1^2 R_1 R_2 \omega_R^2 \right) + \right. \\ & \left. + \omega_R^2 R_2 C_2 \left(R_1 C_1 \omega_S^2 - \frac{1}{R_1 C_1} \right) - 2 \omega_R^2 \omega_S^2 \frac{R_1}{R_2} \right] + \omega_S^4 \omega_R^4 \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2} = 0 \end{aligned} \quad (95)$$

$$\omega^6 A - \omega^4 B + \omega^2 C - D = 0 \quad (96)$$

Ze wzorów Vietta:

$$1. \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = B / A \quad (97)$$

$$2. \quad \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 = D / A \quad (98)$$

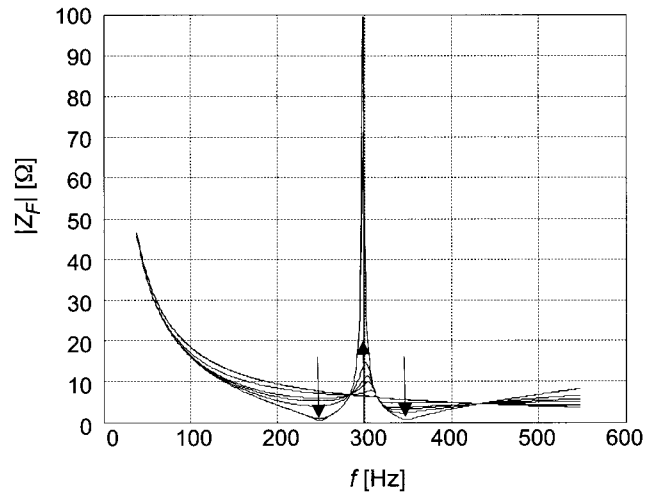
$$3. \quad \omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_3^2 \omega_1^2 = C / A \quad (99)$$

Z mocy filtru:

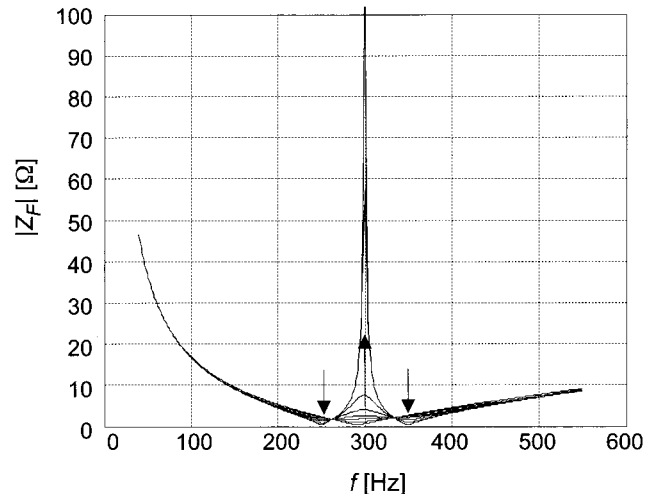
(100)

$$j \frac{R_2 C_2 \left(R_1 C_1 \omega_S^2 - \frac{1}{R_1 C_1} \right) (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) (\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega C_1 \left[\left(\frac{\omega^2}{R_1 C_1 R_2 C_2} + \omega_S^2 (\omega^2 - \omega_R^2) \right)^2 + \omega^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_a^2}{R_1 C_1} - \frac{\omega_S^2}{R_2 C_2} \right)^2 \right]} = -j \frac{U^2}{Q_F}$$

Na rysunkach 22 i 23 pokazano przykładowe charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe układu 17d dla różnych wartości rezystancji R_1 i R_2 .



Rys. 22. Przykładowe charakterystyki układu 17c przy zmianie wartości R_1



Rys. 23. Przykładowe charakterystyki układu 17c przy zmianie wartości R_2

Układ 17d ma dodatkowe rezystancje w części równoległej (tak jak układ 17a) oraz rezystancję bocznikującą (jak układ 17f). Pierwsza z nich ogranicza prąd płynący w tej części oraz tłumi stany dynamiczne, druga – zmniejsza impedancję filtra dla wyższych harmonicznych i również tłumi stany dynamiczne.

Układ 17e

Impedancja części szeregowej:

$$Z_S = j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = j \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega C_1} \quad (101)$$

pulsacja rezonansowa części szeregowej:

$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (102)$$

stąd:

$$L_1 = \frac{1}{\omega_S^2 C_1} \quad (103)$$

Podstawiając (103) do (101) otrzymamy:

$$Z_S = j \frac{\omega^2 - \omega_S^2}{\omega_S^2 C_1 \omega} \quad (104)$$

Impedancja części równoległej:

$$Z_R = \frac{j\omega L_2 \left(R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right)}{R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} + j\omega L_2} \quad (105)$$

$$\omega_R^2 = \frac{1}{C_2 (L_2 - R_2^2 C_2)} \quad (106)$$

stąd warunek:

$$R_2 < \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} \quad (107)$$

Ostatecznie impedancja części równoległej:

$$Z_R = \frac{\omega (R_2^2 C_2^2 \omega_R^2 + 1) (\omega^3 R_2 C_2 + j (\omega^2 - \omega_R^2))}{C_2 \left(\omega^2 R_2^2 C_2^2 \omega_R^4 + (R_2^2 C_2 \omega_R^2 + \omega^2 - \omega_R^2)^2 \right)} \quad (108)$$

Impedancja filtra:

(109)

$$Z_F = j \frac{\omega^2 - \omega_S^2}{\omega_S^2 C_1 \omega} + \frac{\omega (R_2^2 C_2^2 \omega_R^2 + 1) (\omega^3 R_2 C_2 + j (\omega^2 - \omega_R^2))}{C_2 \left(\omega^2 R_2^2 C_2^2 \omega_R^4 + (R_2^2 C_2 \omega_R^2 + \omega^2 - \omega_R^2)^2 \right)}$$

$$Z_F = \frac{\omega^2 C_1 \omega_S^2 (R_2^2 C_2^2 \omega_R^2 + 1) [\omega^3 R_2 C_2 + j (\omega^2 - \omega_R^2)] + \omega C_1 \omega_S^2 C_2 \left[\omega^2 R_2^2 C_2^2 \omega_R^4 + (R_2^2 C_2 \omega_R^2 + \omega^2 - \omega_R^2)^2 \right]}{j \cdot \omega}$$

$$+ j (\omega^2 - \omega_S^2) \left[\omega^2 R_2^2 C_2^2 \omega_R^4 + (R_2^2 C_2 \omega_R^2 + \omega^2 - \omega_R^2)^2 \right] \quad (110)$$

stąd równanie:

$$\begin{aligned} & \omega^6 - \omega^4 \left[\omega_S^2 \frac{C_2 - C_1}{C_2} + 2\omega_R^2 - \omega_R^2 R_2^2 C_2 (C_1 \omega_S^2 + C_2 + 2) \right] + \\ & + \omega^2 \omega_R^2 \left\{ \omega_R^2 \left[(1 - R_2^2 C_2)^2 - \omega_S^2 R_2^2 C_2 (C_1 + C_2) \right] + \right. \\ & \left. + \omega_S^2 \left(2 - 2R_2^2 C_2 - \frac{C_1}{C_2} \right) \right\} - \omega_S^2 \omega_R^4 (1 - R_2^2 C_2)^2 = 0 \end{aligned} \quad (111)$$

Ze wzorów Vietta:

$$1. \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega_S^2 \frac{C_2 - C_1}{C_2} + 2\omega_R^2 - \omega_R^2 R_2^2 C_2 (C_1 \omega_S^2 + C_2 + 2) \quad (112)$$

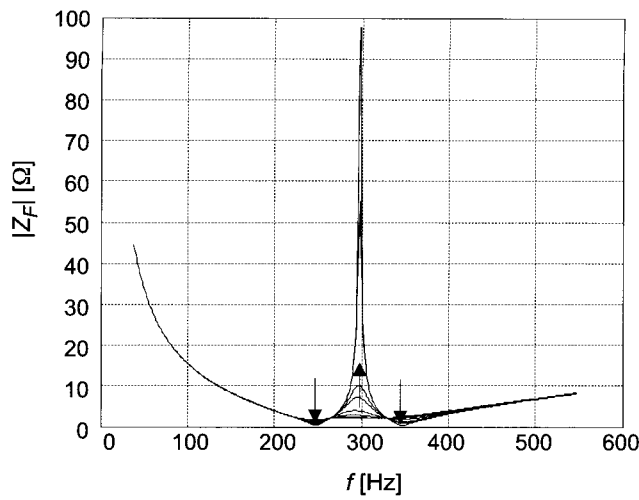
$$2. \quad \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 = \omega_S^2 \omega_R^4 (1 - R_2^2 C_2)^2 \quad (113)$$

$$\begin{aligned} & \omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_3^2 \omega_1^2 = \\ & 3. = \omega_R^2 \left\{ \omega_R^2 \left[(1 - R_2^2 C_2)^2 - \omega_S^2 R_2^2 C_2 (C_1 + C_2) \right] + \right. \\ & \left. + \omega_S^2 \left(2 - 2R_2^2 C_2 - \frac{C_1}{C_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (114)$$

Z mocy filtra:

(115)

$$j \frac{(\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) (\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega C_1 \omega_S^2 \left[\omega^2 R_2^2 C_2^2 \omega_R^4 + (R_2^2 C_2 \omega_R^2 + \omega^2 - \omega_R^2)^2 \right]} = -j \frac{U^2}{Q_F}$$



Rys. 24. Przykładowe charakterystyki układu 17e przy zmianie wartości R_2

Na rysunku 24 pokazano przykładowe charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe układu 17e dla różnych wartości rezystancji R_2 .

Układ 17e ma dodatkową rezystancję w gałęzi z kondensatorem C_2 , która wpływa na pulsację rezonansową. Rezystancja ta powinna spełniać warunek $R < \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}$. Rezystor ogranicza prąd płynący przez kondensator w części równoległej filtra, a co za tym idzie – napięcie na kondensatorze, i tłumí przebiegi przejściowe napięć i prądów.

Układ 17f

Impedancja części równoległej:

$$Z_R = \frac{j\omega L_2 \left(-j \frac{1}{\omega C_2} \right)}{j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2}} = -j \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C_2 - 1} \quad (116)$$

pulsacja rezonansowa:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (117)$$

stąd:

$$L_2 = \frac{1}{\omega_R^2 C_2} \quad (118)$$

Podstawiając (118) do (116) otrzymamy:

$$Z_R = -j \frac{\omega}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)} \quad (119)$$

Dodając indukcyjność L_1 :

$$Z_A = -j \frac{\omega}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)} + j\omega L_1 = \quad (120)$$

$$= j\omega \frac{L_1 C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) - 1}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2)}$$

Jeżeli:

$$\omega_A^2 = \omega_R^2 + \frac{1}{L_1 C_2} \quad (121)$$

czyli:

$$L_1 = \frac{1}{C_2 (\omega_A^2 - \omega_R^2)} \quad (122)$$

to wstawiając (122) do (120) otrzymamy:

$$Z_A = j\omega \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) (\omega_A^2 - \omega_R^2)} \quad (123)$$

Uwzględniając R_1 :

$$Z_B = \frac{j\omega \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) (\omega_A^2 - \omega_R^2)} R_1}{R_1 + j\omega \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{C_2 (\omega^2 - \omega_R^2) (\omega_A^2 - \omega_R^2)}} \quad (124)$$

$$Z_B = \frac{\omega^2 R_1 (\omega^2 - \omega_A^2)^2 + j\omega R_1^2 C_2 (\omega^2 - \omega_A^2) (\omega^2 - \omega_R^2) (\omega_A^2 - \omega_R^2)}{R_1^2 C_2^2 (\omega_A^2 - \omega_R^2)^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 (\omega^2 - \omega_A^2)^2} \quad (125)$$

Impedancja całego filtra:

$$Z_F = \frac{\omega^2 R_1 (\omega^2 - \omega_A^2)^2 + j\omega R_1^2 C_2 (\omega^2 - \omega_A^2)}{R_1^2 C_2^2 (\omega_A^2 - \omega_R^2)^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 (\omega^2 - \omega_A^2)^2} \quad (126)$$

$$\frac{(\omega^2 - \omega_R^2) (\omega_A^2 - \omega_R^2)}{j.\omega} - j \frac{1}{\omega C_1}$$

$$Z_F = \frac{\omega^3 R_1 C_1 (\omega^2 - \omega_A^2)^2 + j\omega^2 R_1^2 C_1 C_2 (\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega_A^2 - \omega_R^2)}{\left(R_1^2 C_2^2 (\omega_A^2 - \omega_R^2)^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 (\omega^2 - \omega_A^2)^2 \right) \omega C_1} - j \frac{j R_1^2 C_2^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 (\omega_A^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 (\omega^2 - \omega_A^2)^2}{\left(R_1^2 C_2^2 (\omega_A^2 - \omega_R^2)^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 (\omega^2 - \omega_A^2)^2 \right) \omega C_1} \quad (127)$$

Jeżeli:

$$\omega_S^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \quad (128)$$

to po podstawieniu (128) do (121), a potem do (127) powstanie równanie:

$$\begin{aligned} & (R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1) \omega^6 - \quad (129) \\ & - \omega^4 \left[2(R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1) \omega_R^2 + R_1^2 C_1^2 \omega_S^4 \frac{C_1 + C_2}{C_2} - 2\omega_S^2 \frac{C_1}{C_2} \right] + \\ & + \omega^2 \left[(R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1) \left(\omega_R^2 + \frac{C_1}{C_2} \omega_S^2 \right) \omega_R^2 - \frac{C_1}{C_2} \omega_S^2 (C_1 \omega_S^2 + C_2 \omega_R^2) \right] - \\ & - R_1^2 C_1^2 \omega_S^4 \omega_R^4 = 0 \end{aligned}$$

ze wzorów Vietta:

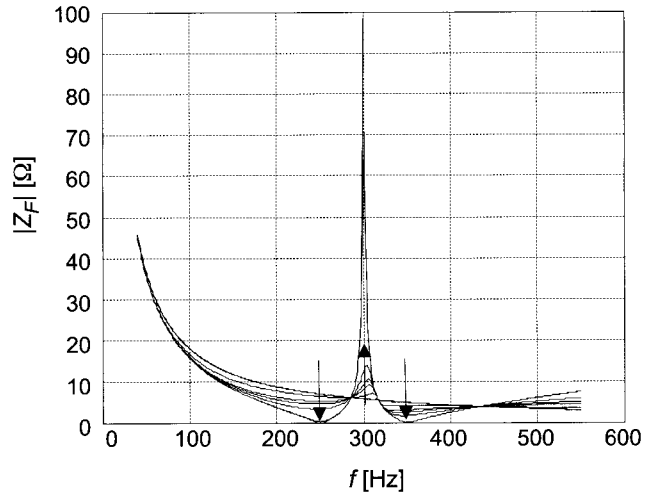
$$1. \quad \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \left[2(R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1) \omega_R^2 + R_1^2 C_1^2 \omega_S^4 \frac{C_1 + C_2}{C_2} - 2\omega_S^2 \frac{C_1}{C_2} \right]}{(R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1)} \quad (130)$$

$$2. \quad \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 = R_1^2 C_1^2 \omega_S^4 \omega_R^4 / (R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1) \quad (131)$$

$$3. \quad \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_3^2 \omega_1^2 = \left[(R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1) \left(\omega_R^2 + \frac{C_1}{C_2} \omega_S^2 \right) \omega_R^2 - \frac{C_1}{C_2} \omega_S^2 (C_1 \omega_S^2 + C_2 \omega_R^2) \right]}{(R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1)} \quad (132)$$

z mocy filtru:

$$j \frac{(R_1^2 C_1^2 \omega_S^2 - 1) (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2) (\omega^2 - \omega_3^2)}{\left(R_1^2 C_2^2 (\omega_A^2 - \omega_R^2)^2 (\omega^2 - \omega_R^2)^2 + \omega^2 (\omega^2 - \omega_A^2)^2 \right) \omega C_1} = -j \frac{U^2}{Q_F} \quad (133)$$



Rys. 25. Przykładowe charakterystyki układu 17f przy zmianie wartości R_1

Na rysunku 25 pokazano przykładowe charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe układu 17e dla różnych wartości rezystancji R_1 .

Układ 17f jest trochę odmienny od pozostałych, podobnie jak układ 17d. Trudno tutaj wyodrębnić osobne części szeregowo i równoległe. Gdy wartość rezystancji R_1 jest wystarczająco duża, filtr można sprowadzić do klasycznego układu filtru podwójnie nastrojonego. Jeżeli rezystancja jest mała, układ można przyrównać do prostego układu RC.

W tabeli 2 podano podstawowe wielkości dotyczące filtrów z rysunku 17.

We wszystkich sześciu układach nie uwzględniono rezystancji dławików i kondensatorów. Mają one głównie wpływ na kształt charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych oraz na tłumienie w stanach przejściowych, jak również na ograniczenie wartości prądów i napięć na poszczególnych elementach filtru.

Rezystancje dodatkowe zmniejszają czułość układu na zmianę parametrów. Uwzględnienie tych rezystancji w analizie układów jest trudne i czasochłonne. Dlatego zdecydowano się na użycie algorytmu genetycznego do wyznaczenia parametrów filtru podwójnie nastrojonego dla wszystkich wariantów z rysunku 17.

3. ALGORYTMY GENETYCZNE

Alternatywą dla metod analitycznych może być zastosowanie algorytmu genetycznego (AG) do wyznaczenia parametrów filtru. Jest to metoda optymalizacji oparta na procesach ewolucyjnych. Jedną z wielu jej zalet jest możliwość dowolnego kształtowania optymalizowanej funkcji, w tym również możliwość optymalizacji wielokryterialnej. Algorytmy genetyczne różnią się od tradycyjnych metod optymalizacyjnych kilkoma podstawowymi cechami:

1. Nie przetwarzają bezpośrednio parametrów zadania, lecz ich zakodowaną postać.
2. Prowadzą przeszukiwanie, wychodząc nie z pojedynczego punktu, lecz z pewnego zbioru.
3. Korzystają tylko z funkcji celu, nie korzystają zaś z pochodnych lub innych pomocniczych informacji.