

METODY OPTYMALIZACYJNE TEORII MOCY, PRZEGLĄD ZASAD MINIMUM DLA OBWODU JEDNOOCZKOWEGO

Optimization Techniques in Power Theory, Review of Minimization Principles Concerning One-Loop Circuit

Maciej SIWCZYŃSKI
Politechnika Zielonogórska

Marcin JARACZEWSKI
Politechnika Krakowska

Streszczenie: Celem niniejszej pracy jest sformułowanie zasad optymalizacyjnych dla obwodu jednooczkowego w oparciu o rachunek wariacyjny. Zasada wariacyjna polega na wyznaczeniu optymalnego sygnału prądu w obwodzie jednooczkowym w taki sposób, aby sygnał ów minimalizował zadany funkcjonal.

W pracy dokonano przeglądu metod poszukiwania punktu optimum. Podejście takie znajduje zastosowanie w teorii mocy w zagadnieniu dopasowania odbiornika do źródła.

Summary: The aim of the paper is formulation of original optimisation procedures concerning the one-loop circuit. These procedures are based on the variation principle. The variation principle consists in determining an optimal current signal in the one-loop circuit in such a way that the signal shall minimise the assumed functional. This approach can be applied in power theory to the problem of matching a load and source. A revue of optimal point searching methods is presented in the paper.

1. WSTĘP

Centralnym zagadnieniem teorii mocy w obwodach z przebiegami odkształconymi jest wyjaśnienie zjawiska zmniejszania się — wskutek deformacji przebiegów — stopnia wykorzystania źródła energii, a także znalezienie technicznych metod zaradzenia temu zjawisku.

Najprostszym rozwiązaniem optymalizacyjnym energetycznej teorii obwodów elektrycznych jest minimalizacja prądu idealnego źródła napięcia zgodnie z teorią S. Fryzego. Model takiego układu ilustruje schemat przedstawiony na rysunku 1. Sygnał napięcia nie zależy w nim od sygnału prądu i spełnia warunek $u(t) = e(t)$, gdzie e jest zadany sygnałem napięcia źródłowego.

Poszukuje się sygnału prądu i , o minimalnej normie, przenoszącego zadaną moc czynną P :

$$(i, i) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$P - (e, i) = 0 \quad (2)$$

gdzie (x, y) jest iloczynem skalarnym sygnałów, który definiuje się w zależności od rodzaju sygnałów (tzw. przestrzeni sygnałowej).

Dalej symbol:

$$\|x\| = (x, x)^{0,5}$$

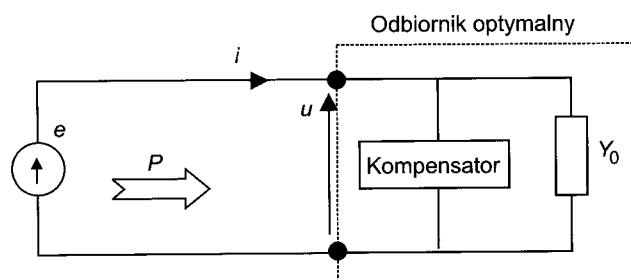
oznacza normę kwadratową.

Rozwiązując to zagadnienie metodą czynnika nieoznaczonego Lagrange'a, tworzy się funkcjonal:

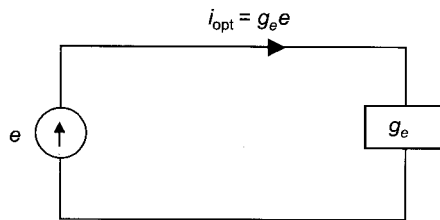
$$f(i, \lambda) = (i, i) - \lambda(e, i) \rightarrow \min$$

którego zmianę (wariację) określa wzór:

$$\delta f(i, \lambda) = f(i + \delta i, \lambda) - f(i, \lambda) = (2i - \lambda e, \delta i) + (\delta i, \delta i)$$



Rys. 1. Obwód jednooczkowy z źródłem idealnym



Rys. 2. Interpretacja fizyczna konduktancji optymalnej

skąd wynika warunek konieczny i dostateczny minimum:

$$i = 0,5 \lambda e \quad (3)$$

Wstawiając otrzymany sygnał prądowy, proporcjonalny do sygnału napięcia e , do bilansu mocy (2), można obliczyć współczynnik nie oznaczony λ :

$$0,5 \lambda = \frac{P}{\|e\|^2} \quad (4)$$

Tak więc sygnał prądowy o minimalnej wartości skutecznej, zapewniający zadany strumień mocy czynnej P , określony jest w następujący sposób:

$$i_{\text{opt}} = \frac{P}{\|e\|^2} e = g_e e$$

gdzie $g_e = \frac{P}{\|e\|^2}$ jest konduktancją równoważną pewnemu odbiornikowi optymalnemu (rys. 2).

Została ona opisana przez Fryzego [16] czysto intuicyjnie i bez związku z metodami optymalizacyjnymi [6, 23, 25]. Podejście optymalizacyjne umożliwia znajdowanie jej także w sytuacji źródeł rzeczywistych, w których uwzględnia się straty mocy w samym źródle [25, 37], a nawet w układzie przesyłowym [25].

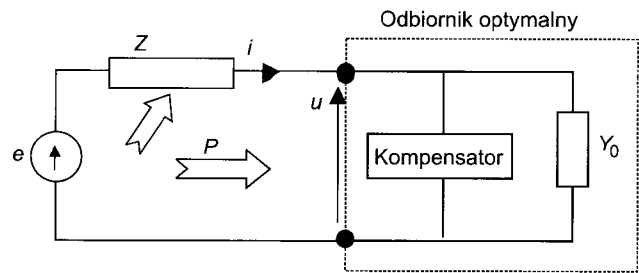
2. DOPASOWANIE ODBIORNIKA DO ŹRÓDŁA ZE WZGLĘDU NA MAKSYMUM WYDAWANEJ MOCY

Model źródła idealnego jest zbyt prosty. Samo źródło nie utrzymuje sztywno sygnału napięcia u — zmienia się on wraz ze zmianą sygnału prądu i . Na rysunku 3 pokazano model takiego źródła w układzie z odbiornikiem optymalnym.

Zmiany sygnału napięcia na zaciskach uzyskuje się przez wprowadzenie operatora impedancji wewnętrznej źródła Z .

Jest to, w zależności od sytuacji, przyczynowy liniowy niestacjonarny (parametryczny — zależny od t) operator typu:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t, t-t') i(t') dt'$$



Rys. 3. Obwód jednooczkowy ze źródłem rzeczywistym (elastycznym i stratnym)

działający w pewnej liniowej unormowanej i zupełnej przestrzeni zaopatrzonej w iloczyn skalarny — przestrzeni Hilberta. W ten sposób umożliwia się badanie sygnału, zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości dla szerszej klasy układów, np. wieloprzewodowych lub wielowrotowych.

Najprostszym rozwiązaniem optymalizacyjnym źródła elastycznego (rzeczywistego) jest maksymalna moc P :

$$P = f(i) = (e, i) - (Ri, i) \rightarrow \max \quad (5)$$

gdzie:

- $R = 0,5 (Z + Z^*)$ — samosprężony, dodatnio określony liniowy operator określony przez operator impedancji wewnętrznej źródła Z
- Z^* — operator sprzężony względem liniowego operatora Z .

Drugi składnik w funkcjale (5) oznacza straty mocy wewnątrz źródła. Dopiero uwzględnienie tych strat, wyznaczonych przez dodatnio określony operator R istotnie wpływa na jakościową zmianę wyniku. Operator R można nazwać *operatorem stratności źródła* [25].

Maksimum funkcjalu prądowego (5) znajduje się poprzez badanie wariacji:

$$\delta f(i) = f(i + \delta i) - f(i) = (e - 2Ri, \delta i) - (R\delta i, \delta i) \quad (6)$$

Stąd otrzymuje się warunek maksimum:

$$i = 0,5R^{-1}e$$

Ponieważ operator dodatnio określony zawsze ma operator odwrotny [25], zatem prąd dopasowania określa wyrażenie:

$$i_{\text{dop}} = 0,5R^{-1}e \quad (7)$$

Maksymalną wydajność energetyczną źródła otrzymuje się ze wzoru (5):

$$P_{\text{max}} = 0,25 (R^{-1}e, e) \quad (8)$$

Nietrudno zauważyć, że dla źródła bezstratnego, tj. takiego, w którym operator R jest operatorem zerowym, zagadnienie maksimum mocy wydawanej nie ma rozwiązania. Są to tzw. źródła o nieskończonej wydajności — bezstratne. Źródła z dodatnio określonym operatorem R mają wydajność skończo-

na. Źródła bezstratne nie są tym samym, co źródła o sztywnym napięciu zaciskowym. Tak więc z punktu widzenia teorii dopasowania, czy też optymalizacyjnej teorii mocy nie tyle istotne jest, czy źródło sztywno utrzymuje napięcie, ale to, czy ma skończoną wydajność [31]. Operator stratności źródła odgrywa więc zasadniczą rolę w całej teorii optymalizacji.

3. MINIMALIZACJA SKUTECZNEGO PRĄDU ŹRÓDŁA O SKOŃCZONEJ WYDAJNOŚCI

O ile poszukiwanie maksimum wydajności energetycznej źródła stratnego jest najprostszym zadaniem w optymalizacyjnej teorii mocy, o tyle minimalizacja prądu przy zadanej mocy opuszczającej źródło jest podstawowym zadaniem praktycznym:

$$(i, i) \rightarrow \min \quad (9)$$

$$(e, i) - (Ri, i) - P = 0$$

Posługując się metodą mnożnika nieoznaczonego Lagrange'a tworzy się funkcjonal [25]:

$$f(i, \lambda) = (i, i) + \lambda [(e, i) - (Ri, i) - P] \rightarrow \min$$

którego przyrost musi być równy zero w punkcie minimum, a większy poza nim:

$$\begin{aligned} \delta f(i, \lambda) &= f(i + \delta i, \lambda) - f(i, \lambda) = \\ &= (2i + 2\lambda Ri - \lambda e, \delta i) + ((\delta i, 1 + \lambda R), \delta i) \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Warunek konieczny i dostateczny minimum przechodzi więc w równanie operatorowe:

$$(1 + \lambda R) i = 0,5 \lambda e \quad (11)$$

gdzie: $\mathbf{1}$ — operator tożsamościowy, jeśli tylko operator $(1 + \lambda R)$ — jest dodatnio określony.

Dla wartości λ , dla których istnieje rozwiązanie równania (11), $i(\lambda)$, określona jest funkcja:

$$F(\lambda) = (e, i(\lambda)) - (Ri(\lambda), i(\lambda)) \quad (12)$$

Funkcja $F(\lambda)$ ma prostą interpretację fizyczną. Przedstawia zależność mocy źródła od czynnika nieoznaczonego Lagrange'a. Jest ona określona dla $\lambda > 0$, gdyż wówczas operator $(1 + \lambda R)$ ma odwrotność, $F(\lambda)$ natomiast nie jest określona na zbiorze:

$$-(SpR)^{-1} = \left\{ -\frac{1}{x} : x \in SpR \right\}$$

gdzie: SpR — widmo [25] operatora R .

Widmo operatora R jest zbiorem niepustym domkniętym i ograniczonym, a ponieważ R jest operatorem samosprężonym dodatnio określonym, widmo składa się z liczb rzeczywistych dodatnich. Tak więc funkcja $F(\lambda)$ określona jest wszędzie, z wyjątkiem niepustego domkniętego, ograniczonego podzbioru w ujemnej półosi λ .

Dla operatora ciągłego zbiór nieoznaczoności funkcji $F(\lambda)$ jest zbiorem przeliczalnym, dla operatora skończenie wymiarowego (dyskretnego) zaś zbiorem punktowym skończonym. Z kolei na przykład dla operatora typu splotu z L_1 funkcja $F(\lambda)$ określona jest poza zbiorem:

$$\{\lambda : \lambda = -\frac{1}{R(\omega)}, \omega \in (-\infty, \infty)\}$$

gdzie: $R(\omega) = 0,5 [Z(j\omega) + Z^*(j\omega)]$ — rozkład widmowy części rzeczywistej impedancji wewnętrznej źródła.

Na zbiorze oznaczoności funkcji $F(\lambda)$ sygnał prądu $i(\lambda)$ jest różniczkowalny względem λ , tj. ma pochodną i^λ , którą można wyznaczyć przez różniczkowanie równania (11) podług λ [25]:

$$(1 + \lambda R) i^\lambda = 0,5 (e - 2Ri) \quad (13)$$

Z (12) i (13) wynika formuła pochodnej funkcji $F(\lambda)$:

$$F'(\lambda) = (e, i^\lambda) - (2Ri, i^\lambda) = (e - 2Ri, i^\lambda) = 2((1 + \lambda R) i^\lambda, i^\lambda)$$

Jest ona dodatnio określona dla $\lambda > 0$, zatem dla $\lambda > 0$ jest monotonicznie rosnąca.

W punktach:

$$\lambda = 0 \Rightarrow F(0) = 0, \quad i^\lambda = 0,5e, \quad F'(0) = 0,5 \|e\|^2$$

$$\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow i = 0,5R^{-1}e, \quad F(\lambda) = 0,25 (R^{-1}e, e) = P_{\max}$$

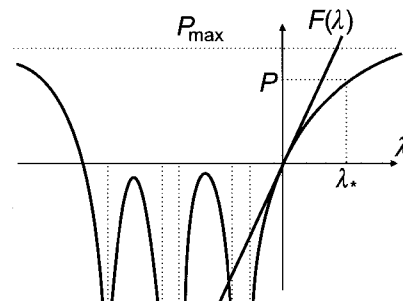
Punkt λ_* będący pierwiastkiem równania:

$$F(\lambda) = P \quad (14)$$

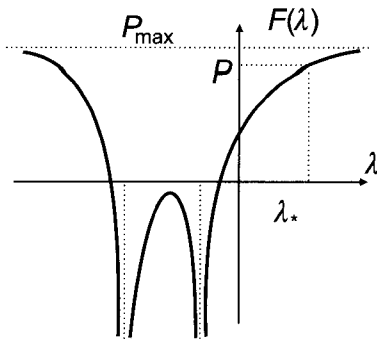
jest jedyną wartością rozwiązującą zadanie minimalizacyjne (9):

$$i_{\text{opt}} = 0,5\lambda_* (1 + \lambda_* R)^{-1}e = G_{\text{opt}} e \quad (15)$$

Na rysunku 4 przedstawiono typowy przebieg funkcji $F(\lambda)$ dla nieskończenie wymiarowego operatora liniowego R . Zaznaczono również wykres idealnej funkcji $F(\lambda)$ dla źródła bezstratnego, gdy R jest operatorem zerowym. Jest to linia prosta, styczna do wykresu $F(\lambda)$ dla źródła stratnego.



Rys. 4. Charakterystyki mocy źródła stratnego



Rys. 5. Charakterystyka mocy

$$i = 0,5 \lambda e, \quad F(\lambda) = 0,5 \|e\|^2 \lambda$$

Odkrycie przebiegu wykresu funkcji było jednym z najważniejszych rezultatów badań nad optymalizacyjną teorią mocy [23, 25]. Uwydatnia on różnicę między teorią mocy źródła o nieskończonej i skończonej wydajności. Wykresy pokazane na rysunku 4 można nazwać *charakterystykami mocy źródła*.

4. OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU SYGNAŁÓW ZACISKOWYCH

Jednym z głównych problemów związanych z jakością zasilania w energię elektryczną jest zapewnienie odbiornikowi zadanej mocy czynnej przy jednoczesnym zachowaniu pożądanych kształtów sygnałów prądu lub napięcia źródła.

Poszukiwanie zadanego kształtu sygnału prądu niosącego moc P można sformułować jako następujące zagadnienie optymalizacyjne:

$$\begin{aligned} (\Delta i, \Delta i) &\rightarrow \min \\ (e, i) - (Ri, i) - P &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie:

$$\Delta i = i - i_0$$

i_0 — zadany sygnał wyjściowy źródła.

Rozwiązanie zagadnienia metodą mnożnika nieoznaczonego Lagrange'a wygląda podobnie jak w punkcie 3:

$$f(i, \lambda) = (\Delta i, \Delta i) + \lambda [(e, i) - (Ri, i) - P] \rightarrow \min$$

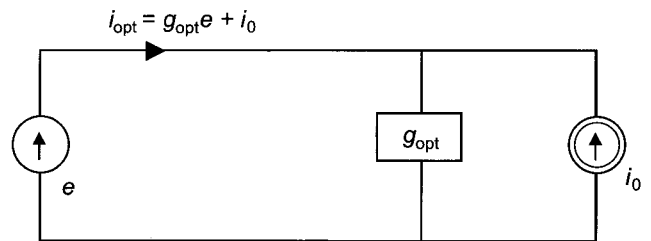
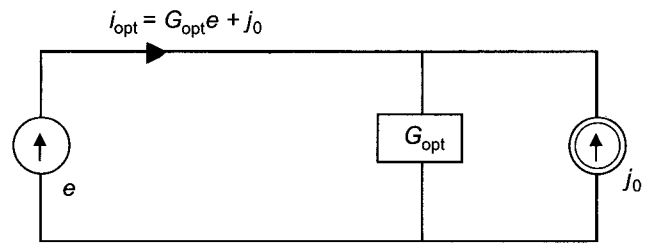
$$\delta f(i, \lambda) = f(i + di, \lambda) - f(i, \lambda) =$$

$$= (2\Delta i + 2\lambda Ri - \lambda e, di) + (\delta i + \lambda R \delta i, \delta i) = 0$$

Warunek konieczny minimum — znikanie gradientu funkcjonału — prowadzi do równania operatorowego:

$$(1 + \lambda R) i = 0,5 \lambda e + i_0 \quad (17)$$

dla źródła bezstratnego: $i = 0,5 \lambda e + i_0$.



Rys. 6. Interpretacja obwodowa prądów optymalnych

Dla λ , dla których istnieje rozwiązanie równania $i(\lambda)$, określona jest funkcja $F(\lambda)$ — charakterystyka mocy źródła — zadana wzorem (12). Ma ona podobny przebieg jak dla zagadnienia minimalizacji prądu skutecznego (p. punkt 4). Jej wykres pokazano na rysunku 5. Nie przechodzi ona przez zero, ale w punktach:

$$\lambda = 0 \Rightarrow \quad i = i_0, \quad F(0) = (e, i_0) - (Ri_0, i_0),$$

$$F'(0) = 0,5 \|e\|^2 - 2(Ri_0, e) + 2(Ri_0, i_0)$$

$$\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \quad i = 0,5 R^{-1} e, \quad F(\lambda) = 0,25 (R^{-1} e, e) = P_{\max}$$

(dla źródła bezstratnego: $F(\lambda) = 0,5 \|e\|^2 \lambda + (e, i_0)$) ma wartości dodatnie, a ponadto dla $\lambda > 0$ jest monotonicznie rosnąca.

Po znalezieniu punktu λ_* dla odpowiedniej mocy wyprodukowanej $P = F(\lambda)$ (p. rysunek 5), otrzymuje się z równania (17) sygnał prądu optymalnego:

$$i_{\text{opt}} = G_{\text{opt}} e + j_0 \quad (18)$$

gdzie:

$$G_{\text{opt}} = 0,5 \lambda_* (1 + \lambda_* R)^{-1} \quad \text{— samosprzężony operator konduktancji optymalnej,}$$

$$j_0 = (1 + \lambda_* R)^{-1} i_0$$

Dla źródła bezstratnego:

$$i_{\text{opt}} = \frac{P - (e, i_0)}{\|e\|^2} e + j_0 = g_{\text{opt}} e + j_0 \quad (19)$$

g_{opt} — liczba, tzw. konduktancja optymalna.

Obwody prądów optymalnych ilustrują schematy na rysunku 6.

5. ZŁOŻONE ZADANIA OPTIMALIZACYJNE

W praktyce mogą być pożądane kompromisy między minimalizacją skutecznego prądu (stratami) a zniekształceniami prądu lub napięcia. Przykładem może być tu liniowa homotopia między kompensacją kształtu prądu a wygładzaniem sygnału napięcia:

$$\alpha (\Delta i, \Delta i) + (1 - \alpha)(\Delta u, \Delta u) \rightarrow \min$$

$$(e, i) - (Ri, i) - P = 0 \quad (20)$$

gdzie:

$$\Delta i = i - i_0$$

$$\Delta u = u_0 - u = Zi - u_{Z0} \quad (u_{Z0} = e - u_0)$$

i_0, u_0 — zadane sygnały wyjściowe źródła
 $0 \leq \alpha \leq 1$.

Kompromis między minimum wartości skutecznej a kształtem sygnału prądu zachodzi, gdy:

$$(i, i) \rightarrow \min$$

$$(\Delta u, \Delta u) = \beta^2 \quad (21)$$

$$(e, i) - (Ri, i) - P = 0$$

gdzie: β — zadana wartość.

Inne zadania kompromisowe, to:

$$(\Delta i, \Delta i) \rightarrow \min$$

$$(\Delta u, \Delta u) = \beta^2 \quad (22)$$

$$(e, i) - (Ri, i) - P = 0$$

albo

$$(\Delta u, \Delta u) \rightarrow \min$$

$$(\Delta i, \Delta i) = \beta^2 \quad (23)$$

$$(e, i) - (Ri, i) - P = 0$$

Zadania od (20) do (24) to dwukryterialne problemy minimalizacyjne. Wszystkie, przy spełnieniu pewnych warunków, są matematycznie poprawnie postawione [31]. Mają one jednak pewną wadę. Nie można w sposób satysfakcjonujący dokonać jednoczesnej poprawy sygnału ze względu na dwa kryteria naraz, gdyż wtedy albo jedno, albo drugie jest zoptymalizowane niewystarczająco.

6. METODY POSZUKIWANIA PRĄDÓW OPTIMALNYCH W LINIOWYCH OBWODACH JEDNOOCZKOWYCH

Wszystkie opisane wcześniej procedury optymalizacyjne działają przy założeniu obwodów liniowych niestacjonarnych — parametrycznych, gdzie $Z = Z(t)$, $R = R(t)$ określone są zależnościami:

$$Z(t) i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t, t-t') i(t') dt'$$

$$R(t) i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, t-t') i(t') dt'$$

Stanowią one pierwsze przybliżenie obwodów nieliniowych i zdolne są do symulowania zniekształceń prądów i napięć.

Równanie $F(\lambda) = 0$ jest jednak nieliniowe i jego rozwiązanie wymaga bardziej złożonego podejścia.

6.1. Metoda Newtona

Jedną z bardziej efektywnych metod rozwiązywania problemów nieliniowych jest metoda Newtona. W zastosowaniu do równania postaci:

$$F(\lambda) - P = 0$$

ma ona następujący przebieg. Nadając zmiennej λ przyrost $\delta\lambda$ i pomijając wyższe potęgi $\delta\lambda$ w rozwinięciu lewej strony równania, otrzymuje się:

$$F(\lambda + \delta\lambda) - P = F(\lambda) + F'(\lambda)\delta\lambda - P = 0$$

stąd wyznacza się formułę iteracyjną dla λ :

$$\delta\lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{P - F(\lambda_k)}{F'(\lambda_k)}$$

albo

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{P - F(\lambda_k)}{F'(\lambda_k)} \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Formułę iteracyjną dla λ otrzymuje się więc w konkretnym przypadku w następującym sposób:

— wyznaczamy prąd optymalny np. dla zagadnienia optymalizacyjnego z liniowym, parametrycznym operatorem R (równania 9 i 10):

$$i = 0,5\lambda (1 + \lambda R)^{-1} e$$

oraz jego pochodną $i^\lambda = 0,5 (1 + \lambda R)^{-\lambda} (e - 2Ri)$;
 — mając prąd optymalny możemy wyliczyć

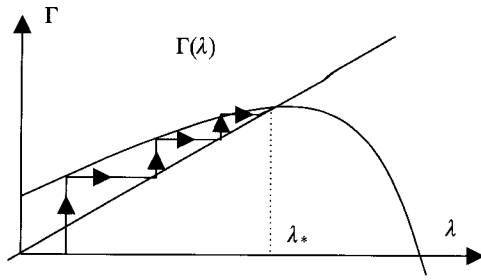
$$F(\lambda) = (e, i) - (Ri, i)$$

oraz

$$F'(\lambda) = 2((1 + \lambda R) i^\lambda, i^\lambda);$$

— następnie wyznaczamy rekurencyjną zależność dla λ w celu znalezienia pierwiastka λ^* równania $F(\lambda) = P$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + F'(\lambda_k)^{-1} (P - F(\lambda_k)) \rightarrow \lambda^*$$



Rys. 7. Ilustracja zbieżności algorytmu 24

Metoda jest efektywna i szybko otrzymuje się rozwiązanie. Dowód zbieżności ciągu (24) można uzyskać obliczając dodatkowo drugą pochodną $F(\lambda)$:

$$F''(\lambda) = (-6Ri^\lambda, i^\lambda) < 0 \text{ dla } \lambda > 0$$

Wynika z tego że $F(\lambda)$ jest funkcją wypukłą i granica ciągu

$$(24) \lambda_* \text{ jest punktem stałym funkcji } \Gamma(\lambda_k) = \lambda_k + \frac{P - F(\lambda_k)}{F'(\lambda_k)}$$

$(\Gamma(\lambda_*) = \lambda_*, \text{ rys. 7})$ bowiem jej pochodna $\Gamma'(\lambda_k) = [F(\lambda_k) - P] \frac{F'(\lambda_k)}{F''(\lambda_k)^2}$ jest:

$$\Gamma'(\lambda_k) > 0 \text{ gdy } \lambda_k < \lambda_*$$

$$\Gamma'(\lambda_k) < 0 \text{ gdy } \lambda_k > \lambda_*$$

i dla $\lambda = \lambda_*$ funkcja $\Gamma(\lambda)$ posiada maksimum.

6.2. Metoda równań różniczkowych

Problem minimalizacji funkcjonału $f(i, \lambda)$ może być rozwiązany przez znalezienie stanu ustalonego dla sztucznego układu równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt} i = - \frac{\partial f(i, \lambda)}{\partial i} = -(2i + 2\lambda Ri - \lambda e) \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda = \frac{\partial f(i, \lambda)}{\partial \lambda} = P + (Ri, i) - (e, i)$$

Układ jest stabilny i dla $t \rightarrow \infty$ otrzymujemy $i \rightarrow i_{opt} \left\{ \frac{d}{dt} i \rightarrow 0, \right.$

$$\left. \frac{d}{dt} \lambda \rightarrow 0 \right\}.$$

Może on też być zapisany w wersji bez prądowego równania różniczkowego:

$$i(\lambda) = (\lambda + \lambda R)^{-1} 0,5 \lambda e \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda = P + (Ri, i) - (e, i)$$

Dowód stabilności rozwiązania powyższych równań różniczkowych można wykazać stosując twierdzenie Lapunowa. Minimalizowany funkcjonał można ogólnie zapisać w postaci:

$$f = (i, i) + (x, F(i)) = (i, i) + \sum_{n=1}^k x_n g_n(i)$$

gdzie:

$$x = [\lambda, \mu, \dots]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, F(i) = \begin{bmatrix} g_1(i) \\ \vdots \\ g_k(i) \end{bmatrix} \text{ — wektor } k \text{ warunków-funkcji.}$$

a dla dowolnego δi :

$$\delta f = \left(\delta i, 2i + \sum_{n=1}^k x_n \frac{\partial}{\partial i} g_n(i) \right) + \left(\delta i, \left[2I + \sum_{n=1}^k x_n \frac{\partial^2}{\partial i^2} g_n(i) \right] \delta i \right) = \left(\delta i, 2i + \sum_{n=1}^k x_n \frac{\partial}{\partial i} g_n(i) \right) + \left(\delta i, \left[2I + \sum_{n=1}^k x_n H^n \right] \delta i \right) \geq 0$$

gdzie elementy hesjana H^n funkcji $g_n(i)$ zdefiniowane są następująco:

$$H_{k,1}^n = H_{k,1}^n = \left[\frac{\partial^2 g_n}{\partial i^2} \right]_{k,1} = \frac{\partial^2 g_n}{\partial i_k \partial i_1}$$

jego przyrost musi być równy zero w punkcie minimum i więk-

szy od zera poza nim, z czego wynika, że $A = 2I + \sum_{n=1}^k x_n H^n$ musi być operatorem dodatnio określonym.

Z powyższych warunków otrzymujemy układ równań:

$$2i + \sum_{n=1}^k x_n \frac{\partial}{\partial i} g_n(i) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(i) \\ g_2(i) \\ \vdots \\ g_k(i) \end{bmatrix}$$

Załóżmy, że układ ma rozwiązanie x_* , każde więc zaburzenie δx ($x = x_* + \delta x$) doprowadza do „zaburzonego układu różniczkowego”:

$$n \in \hat{[1 \dots k]} \quad 2 \frac{\partial}{\partial x_n} i + \frac{\partial}{\partial i} g_n(i) + x_n \left(H^n, \frac{\partial}{\partial x_n} i \right) =$$

$$= A \frac{\partial}{\partial x_n} i + \frac{\partial}{\partial i} g_n(i) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_* + \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_*) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_*) \delta \mathbf{x} =$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{x}_*) + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial g_1}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_k} \right) \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial g_2}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_k} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_k}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial g_k}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial g_k}{\partial i}, \frac{\partial i}{\partial x_k} \right) \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}$$

po podstawieniu $\frac{\partial}{\partial i} g_n(i) = -A \frac{\partial}{\partial x_n} i$ i uwzględnieniu równości (27) otrzymujemy układ różniczkowy dla samego zaburzenia:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \mathbf{J}(\mathbf{x}_*) \delta \mathbf{x} =$$

$$= -A \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial i}{\partial x_1}, \frac{\partial i}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial i}{\partial x_2}, \frac{\partial i}{\partial x_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial i}{\partial x_k}, \frac{\partial i}{\partial x_k} \right) \\ \left(\frac{\partial i}{\partial x_1}, \frac{\partial i}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial i}{\partial x_2}, \frac{\partial i}{\partial x_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial i}{\partial x_k}, \frac{\partial i}{\partial x_k} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial i}{\partial x_1}, \frac{\partial i}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial i}{\partial x_2}, \frac{\partial i}{\partial x_2} \right) & \dots & \left(\frac{\partial i}{\partial x_k}, \frac{\partial i}{\partial x_k} \right) \end{bmatrix} \delta \mathbf{x} = -A \mathbf{G} \delta \mathbf{x}$$

Ponadto $g_n(i)$ są funkcjami typu $g_n(i) = (i, \mathbf{R}_n i) + (b_n, i) + c_n$, a

ich drugie pochodne $\frac{\partial^2}{\partial i^2} g_n(i) = 2\mathbf{R}_n$, stąd $A = 2(1 + \sum_{n=1}^k x_n \mathbf{R}_n)$.

Dla tego równania funkcja Lapunowa $E = \delta \mathbf{x}^T \delta \mathbf{x} > 0$.

Twierdzenie Lapunowa mówi, że aby rozwiązanie układu dla zaburzenia dążyło do zera (dla $t \rightarrow \infty \delta \mathbf{x} \rightarrow 0$), pochodna funkcji energetycznej musi być ujemna dla każdej trajektorii $\delta \mathbf{x}$:

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}^T \delta \mathbf{x} = \left(\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}^T \right) \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^T \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} =$$

(28)

$$= \delta \mathbf{x}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_*)^T (\delta \mathbf{x}) + \delta \mathbf{x}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_*) \delta \mathbf{x} = 2 \delta \mathbf{x}^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_*) \delta \mathbf{x} < 0$$

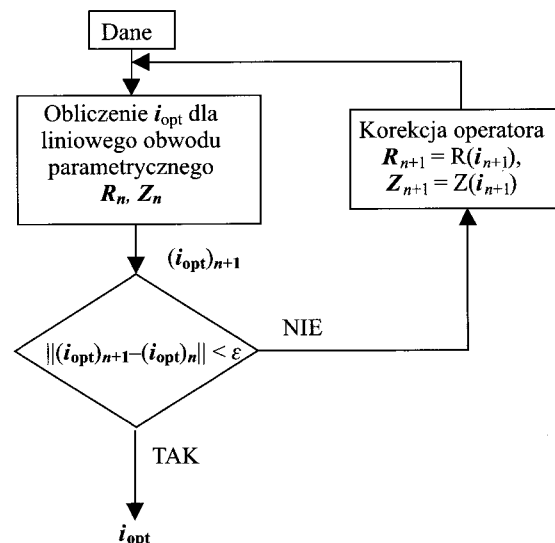
ponieważ $\mathbf{J}(\mathbf{x}_*)$ jest funkcją macierzową dodatnio określoną (\mathbf{G} jest macierzą Grama, a operator A jest zawsze dodatni), zatem warunek (28) jest spełniony i istnieje rozwiązanie sta-

bilne dla $t \rightarrow \infty \frac{d}{dt} E = 0$, wtedy też $\frac{d}{dt} \mathbf{x} = 0$.

7. METODY POSZUKIWANIA PRĄDÓW OPTYMALNYCH W NIELINIOWYCH OBWODACH JEDNOOCZKOWYCH

Operatory liniowe niestacjonarne można zastosować do optymalizacji układów z nieliniowym operatorem $\mathbf{R}(i)$.

Rozwiązaniem może być wprowadzenie dodatkowej pętli modyfikującej $\mathbf{R}_{v+1} = \mathbf{R}(i)$ [$\mathbf{R}(\lambda_{v+1}) = \mathbf{R}(i(\lambda_{v+1}))$] po każdym znalezionym rozwiązaniu dla ustalonego \mathbf{R}_v . Ilustruje to pokazany na rysunku 8 schemat blokowy.



Rys. 8. Schemat blokowy pętli optymalizacji nieliniowej

W innym podejściu należy modyfikować $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_n$ w każdym kroku iteracji algorytmu Newtona (24). Dochodzi więc jeszcze jeden punkt:

— wyliczenie nowego operatora $\mathbf{R}_{v+1} = \mathbf{R}(\lambda_{v+1})$ (30)

Podobnie modyfikuje się prawą stronę równań różniczkowych (25 i 26) podstawiając $\mathbf{R} = \mathbf{R}(i)$

7.1. Metoda minimalizacji globalnej — algorytmy genetyczne

Algorytmy globalnej minimalizacji funkcji np. algorytm genetyczny mogą posłużyć do znalezienia wartości λ , która minimalizuje funkcjonal:

$$f(\lambda) = \left(\frac{d}{dt} \lambda \right)^2 \rightarrow \min$$

lub

$$f(\lambda, \mu) = \left(\frac{d}{dt} \lambda \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \mu \right)^2 \rightarrow \min$$

gdzie poszczególne różniczki należy zastąpić odpowiadającymi im prawymi stronami równań różniczkowych (25, 26).

Algorytm genetyczny może również posłużyć do znalezienia i_{opt} wprost z warunków zadania:

$$(i, i) \rightarrow \min$$

$$P + (\mathbf{R}i, i) - (e, i) = 0$$

Poprzez minimalizację funkcji:

$$F(\mathbf{i}) = (\mathbf{i}, \mathbf{i}) + k[(\mathbf{e}, \mathbf{i}) - (\mathbf{R}\mathbf{i}, \mathbf{i}) - P] \rightarrow \min$$

gdzie:

$k[\dots]$ — funkcja kary za przekroczenie ograniczeń — ma najczęściej postać

$$k[\dots] = ((\mathbf{e}, \mathbf{i}) - (\mathbf{R}\mathbf{i}, \mathbf{i}) - P)^2$$

lub w wartościach względnych

$$k[\dots] = [P + (\mathbf{e}, \mathbf{i}) - (\mathbf{R}\mathbf{i}, \mathbf{i})]^2 / P^2$$

8. CZASOWO DYSKRETNA SYMULACJA OBWODÓW Z OKRESOWO ZMIENNYMI PARAMETRAMI I NIELINIOWYCH

Równania obwodów elektrycznych zostały spróbkowane w okresie T (okres podstawowej harmonicznej). W przypadku obliczeń opartych na przebiegach czasowych sygnały zapisane zostały w postaci wektora, którego kolejne wartości są próbkami dla czasu $n\tau$, gdzie $n \in (0, 1, \dots, N-1)$, N — liczba próbek, τ — czas między próbkami. Wartości parametrów obwodu takich, jak indukcyjność pojemność i rezystancja (ich kolejne spróbkowane wartości) zapisywane są na diagonalnej macierzy, np.:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(\tau) \\ \vdots \\ u((N-1)\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i(0) \\ i(\tau) \\ \vdots \\ i((N-1)\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ \vdots \\ i_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l(0) & & & \\ & l(\tau) & & \\ & & \dots & \\ & & & l((N-1)\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 & & & \\ & l_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & l_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/C(0) & & & \\ & 1/C(\tau) & & \\ & & \dots & \\ & & & 1/C((N-1)\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & & & \\ & b_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & b_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r(0) & & & \\ & r(\tau) & & \\ & & \dots & \\ & & & r((N-1)\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 & & & \\ & r_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & r_{N-1} \end{bmatrix}$$

W przypadku indukcyjności i pojemności wzór opisujący ustalone napięcie okresowe przybiera postać równania macierzowego:

$$u_L(t) = \frac{d}{dt} [l(t) i(t)] \rightarrow \mathbf{u}_L = \mathbf{D} \mathbf{l} \mathbf{i}$$

$$u_C(t) = \int \frac{1}{C(t)} i(t) dt \rightarrow \mathbf{u}_C = \mathbf{S} \mathbf{b} \mathbf{i}$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = 0,5(\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1) =$$

$$= 0,5 \left(\frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & -1 \\ -1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & 0 \\ 0 & -1 & & 1 \\ & & \ddots & \\ 1 & 0 & & -1 \end{bmatrix} \right) -$$

— uśredniony operator różnicowania

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_{N \times N} * \mathbf{s} \quad \text{— uśredniony operator całkowania}$$

$$\mathbf{s} = 0,5\tau \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Iloczyn skalarny (\mathbf{x}, \mathbf{y}) i $\|\mathbf{x}\|$ są zdefiniowane jako:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n \quad \|\mathbf{x}\| = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|$$

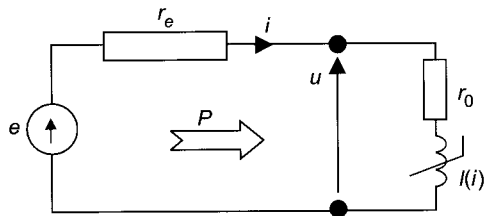
a operatory \mathbf{Z} liczone są wg wzoru:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{r} + \mathbf{l} \mathbf{D}$$

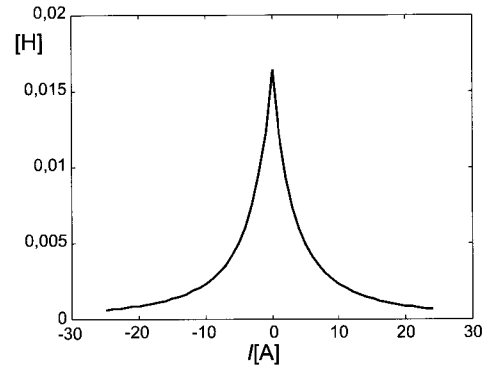
Do obliczenia \mathbf{Z}^{-1} trzeba stosować wzór $\mathbf{Z}^{-1} = (\mathbf{r} + \mathbf{l} \mathbf{D}_1)^{-1}$ gdyż \mathbf{D} jest macierzą osobliwą.

9. PRZYKŁADY

1. Znajdowanie przebiegu prądu ustalonego w obwodzie nieliniowym



Indukcyjność odbiornika



Dane:

$$E = 100\sin(\omega t)$$

$$R_e = R_o = 2$$

400 próbek

Równania podstawowe :

$$l = \text{diag} [l(i)]$$

$$0 = e - ri - lDi$$

gdzie $r = r_e + r_o$



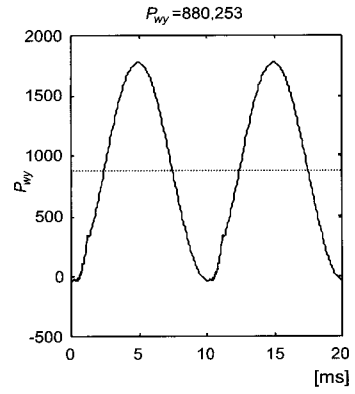
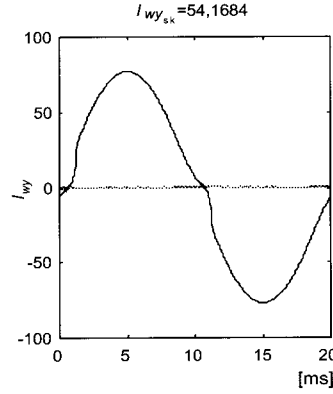
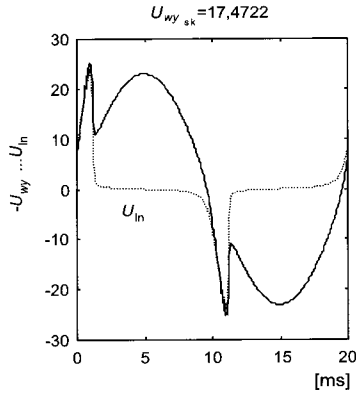
Procedura iteracyjna:

Repeat:

$$l_n = \text{diag} [l(i_n)]$$

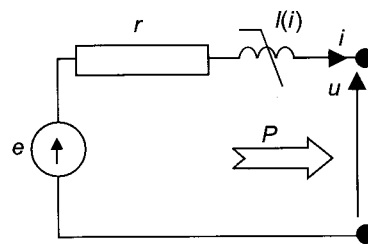
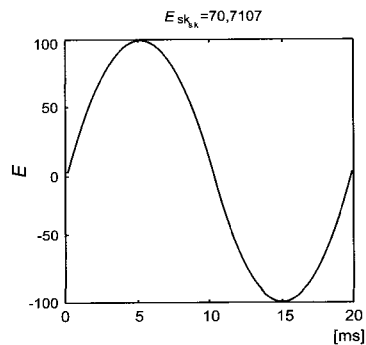
$$i_{(n+1)} = (r - l_n D_1)^{-1} e$$

until $\|i_{(n+1)} - i_n\| < \varepsilon$



gdzie: U_{wy} , I_{wy} oznaczają napięcie i prąd wyjściowy źródła (u i i), a U_{ln} — napięcie na indukcyjności nieliniowej.

2. Znajdowanie optymalnego przebiegu prądu nieliniowego źródła



Równania podstawowe:

$$i^T i \rightarrow \min$$

$$l = \text{diag}[l(i)]$$

$$0 = (e_t - ri - lDi)^T i - P$$

Dane:
 $E = 100\sin(314t)$
 $R = 2$
 $P = 600$
 $L(i)$ — jak w poprzednim przypadku

Procedury (wg 24 i 11):
 Metoda Newtona:

Funkcja do metody równań różniczkowych

Metoda iteracyjna

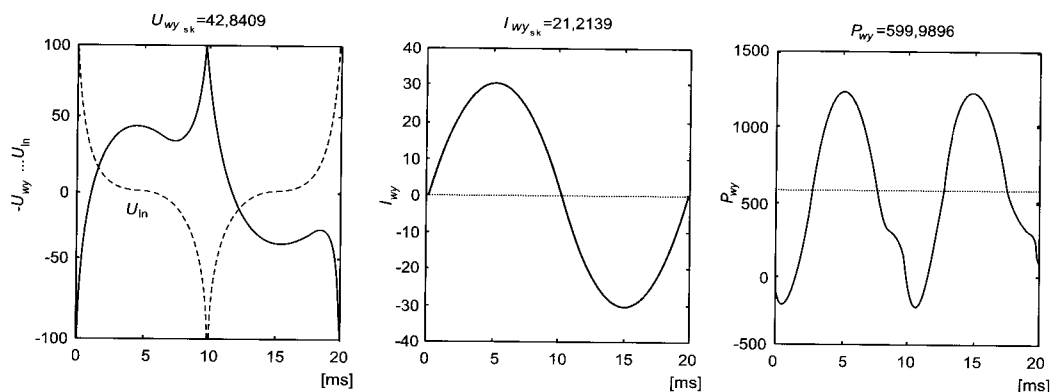
Repeat:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \text{diag}[l(i_{(n-1)})] \\
 i_n &= 0,5\lambda_n (I + \lambda_n r)^{-1} e \\
 i'_n &= 0,5 (I + \lambda_n r)^{-1} (e - 2ri_n) \\
 F(\lambda_n) &= (e - ri_n - lDi_n)^T i_n - P \\
 F'(\lambda_n) &= 2((I + \lambda_n r)i'_n)^T i'_n \\
 \lambda_{n+1} &= \lambda_n - F(\lambda_n)^{-1} F(\lambda_n) \\
 \text{until } & \|\lambda_{n+1} - \lambda_n\| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_n &= \text{diag}[l(i_{(n-1)})] \\
 i_n &= 0,5\lambda_n (I + \lambda_n r)^{-1} e \\
 \delta\lambda_n &= (e - ri_n - lDi_n)^T i_n - P
 \end{aligned}$$

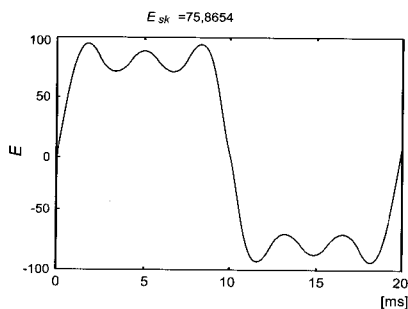
Repeat

$$\begin{aligned}
 I_n &= \text{diag}[l(i_{(n-1)})] \\
 i_n &= 0,5\lambda_n (I + \lambda_n r)^{-1} e \\
 \lambda_{n+1} &= \lambda_n + (e - ri_n - lDi_n)^T i_n - P \\
 \text{until } & \|\lambda_{n+1} - \lambda_n\| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

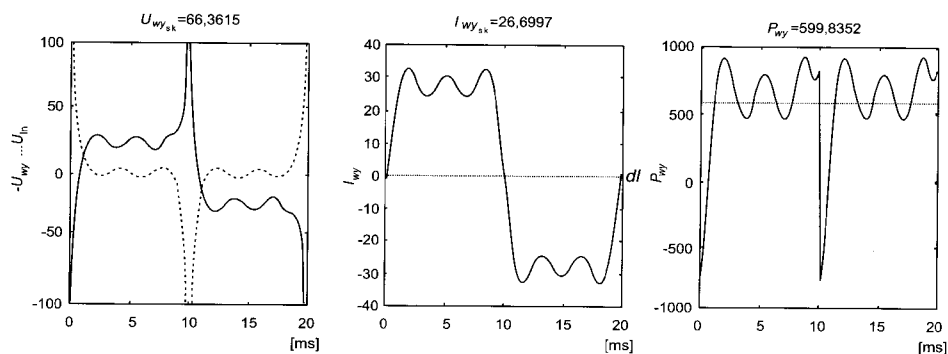


gdzie: U_{wy} , I_{wy} oznaczają napięcie i prąd wyjściowy źródła (u i i), a U_{in} — napięcie na indukcyjności nieliniowej. Podobnie dla źródła wieloharmonicznego:

$$E = 100\sin(314t) + 100/3 \sin(3 \cdot 314t) + 100/5 \sin(5 \cdot 314t)$$



optymalny prąd jest w fazie z napięciem źródła.



LITERATURA

1. Akagi H., Kanazawa V., Nabae A.: *Generalized theory of instantaneous reactive power in three-phase system*. Int. Power Electron. Conf. (IPEC), Tokyo 1983, 1375–1386.
2. Budeanu C.: *Puissances réactives et fictives*. RGE 1928, XXIII, 1928, 762–773.
3. Czarnecki L.S.: *Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi*. ZN Pol. Śl. Elektryka, z. 91. Gliwice 1984 (monografia).
4. Czarnecki L.S.: *Minimisation of reactive power under non-sinusoidal conditions*. IEEE Trans. Vol. IM – 36, 1987, 18–22.
5. Czarnecki L.S.: *An orthogonal decomposition of the current of nonsinusoidal voltage source applied to nonlinear loads*. Int. J. Circ. Theory Appl. 1983, 11, 235–239.
6. Czarnecki L.S.: *Ortogonalne składniki prądu odbiornika liniowego zasilanego napięciem odkształconym*. ZN Pol. Śl. Elektryka, z. 86. Gliwice 1983, 5–17.
7. Czarnecki L.S.: *Ortogonalny rozkład prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego asymetryczny, nieliniowy odbiornik trójfazowy*. X SPETO 1997, 131–141.
8. Czarnecki L.S.: *Pojemnościowo-indukcyjna koncepcja mocy biernej obwodów z przebiegami odkształconymi*. ZN Pol. Śl. Elektryka, z. 86. Gliwice 1983, 18–23.
9. Czarnecki L.S.: *Reactive and unbalanced currents compensation in three-phase circuits under nonsinusoidal conditions*. IEEE Trans. Vol. IM – 38, 1989, 839–841.
10. Czarnecki L.S.: *A time domain approach to reactive current minimisation in nonsinusoidal situations*. IEEE Trans. Vol. IM – 39, 1990, 688–702.
11. Czarnecki L.S.: *What is wrong in with the Budeanu concept of reactive and distortion power, and why it should be abandoned*. IEEE Trans. Vol. IM – 36, 1987.
12. Depenbrock M.: *Wirk- und Blindleistung*. ETO Fachung „Blindleistung”. Aachen, Oct. 1979, 17–63.
13. Emanuel E.A.: *Energetic factors in power systems with nonlinear loads*. Arch. Elektrotechnik 1977, 59, 183–189.
14. Fischer H.D.: *Bemerkungen zu Leistungsgriffen bei Stromen und Spannungen mit Oberschwingungen*. Arch. Elektrotechnik 1982, 64, 289–295.
15. Fodor G., Tevan G.: *Powers and compensation in networks in periodic state*. Arch. Elektrotechnik 1982, 65, 27–33.
16. Fryze S.: *Wirk-, Blind-, und Scheinleistung in Elektrisch Stromkreisen mit nichtsinusförmigen Verlauf von Strom und Spannung*. ETZ 1932, 53, 596–599, 625–627, 700–702.
17. Fryze S.: *Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki*. PWN, Wrocław 1960.
18. Kimbark E.W.: *Direct current transmission*. Wiley-Interscience, N. York 1971.
19. Kusters N.L., Moore W.J.M.: *On the definition of reactive power under nonsinusoidal conditions*. IEEE Trans. Vol. PAS - 99, 1980, 1845–1854.
20. Pasko M.: *Poprawa warunków pracy rzeczywistego źródła napięcia odkształconych za pomocą dwójników*. LC XV SPETO Gliwice 1992, 527–534.
21. Pasko M., Grzesik B.: *Model realizacji technicznej, kompensacji składowych biernych prądu źródła napięcia odkształconego, zasilającego odbiornik liniowy*. XV SPETO, Gliwice 1992, 535–542.
22. Pasko M., Grzesik B., Kaczmarczyk Z.: *Energoelektroniczna realizacja techniczna dwójnika – ujemnej rezytacji*. XVI SPETO, Gliwice, 225–232.
23. Pasko M., Walczak J.: *Optymalizacja energetyczno-jakościowych właściwości obwodów elektrycznych z przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi*. ZN Pol. Śl. Elektryka, monografia 150, Gliwice 1996.
24. Siwczyński M.: *Energetyczna teoria obwodów elektrycznych*. BSE 98, 115–124.
25. Siwczyński M.: *Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych*. PK Seria: Inżynieria Elektryczna, Kraków 1995 (monografia).
26. Siwczyński M.: *Metody syntezy optymalnych obwodów kompensacyjnych*. EPN, Zielona Góra, 1997, 225–238.
27. Siwczyński M.: *Obwody minimalnoenergetyczne*. EPN, Zielona Góra, 1998, 415–424.
28. Siwczyński M.: *Zastosowanie metod sztucznych sieci neuronowych do syntezy obwodów kompensacyjnych i dopasowujących*. JUEE 1998, 2, 69–75.
29. Siwczyński M.: *Zastosowanie samonaprowadzających procedur optymalizacyjnych do zagadnień poprawiania jakości energii elektrycznej*. JUEE, 1999, 1, 87–92.
30. Siwczyński M., Kłosiński R.: *Komputerowa symulacja zjawisk elektroenergetycznych w układach zasilających w obecności odkształceń*. ZkW 96, Poznań, 57–60.
31. Siwczyński M., Kłosiński R.: *Optymalizacyjne podejście do zagadnień poprawiania jakości energii elektrycznej*. JUEE 1996, 2, 43–54.
32. Siwczyński M., Swat K., Wróbel R.: *Synteza wielowrotnikowych obwodów kompensacyjnych w układach liniowych z okresowo zmiennymi parametrami*. JUEE 1998, 1, 41–52.
33. Walczak J.: *Analiza energetyczno-jakościowych warunków pracy rzeczywistego źródła napięcia nieokresowego o skończonej energii*. XIV SPETO 1991, 123–129.
34. Walczak J.: *Optymalizacja energetyczno-jakościowych właściwości obwodów elektrycznych w przestrzeniach Hilberta*. ZN Pol. Śl. Elektryka z. 125. Gliwice 1992 (monografia).
35. Walczak J.: *Optymalizacja energetycznych warunków pracy rzeczywistego źródła napięcia nieokresowego o skończonej energii*. XIV SPETO 1991, 101–109.
36. Walczak J.: *Optymalizacyjna metoda wyznaczania prądu aktywnego źródła napięcia okresowego niesinusoidalnego o niezerowej impedancji wewnętrznej*. XV SPETO 1992, 457–464.
37. Walczak J.: *Rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym z rzeczywistego źródła napięcia*. XIII SPETO 1990, 295–308.
38. Walczak J.: *Warunki modyfikacji czwórnikowego modelu źródła napięcia okresowego i niesinusoidalnego*. XV SPETO 1992, 449–455.
39. Walczak J., Gawłowski A.: *Optymalizacja warunków pracy źródła zasilającego odbiorniki połączone równolegle*. XV SPETO 1992, 489–499.
40. Walczak J., Umińska-Bortliczek M.: *Minimalizacja prądu idealnego źródła napięcia nieokresowego zasilającego odbiornik dwuzaciskowy*. XIV SPETO 1991, 93–100.
41. Walczak J., Umińska-Bortliczek M.: *Optymalizacja energetyczno-jakościowych warunków pracy idealnych źródeł napięcia nieokresowego o skończonej energii*. XIV SPETO 1991, 111–121.



Prof. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Urodził się w 1946 roku. Studia ukończył w 1969 na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Doktoryzował się w 1974, a habilitował w 1983 w Politechnice Śląskiej. Tytuł profesora otrzymał w 1998 r. Od 1991 jest profesorem nadzwyczajnym w Politechnice Krakowskiej a także profesorem zwyczajnym w Politechnice Zielonogórskiej od 1999 roku. Zajmuje się analizą funkcjonalną i energetyczną teorią obwodów, a także zagadnieniami probabilistycznymi w dynamice. Jest autorem czterech monografii oraz około stu publikacji naukowych w tych dziedzinach.



Dr inż. Marcin Jaraczewski

Urodził się w 1967 roku w Warszawie. Studia na Wydziale Elektrotechniki Automatyki i Elektroniki AGH ukończył w 1994 roku. W latach 1994 do 1999 zatrudniony na stanowisku asystenta w Zakładzie Elektrotechniki AGH. Od 1999 pracuje w Instytucie Elektrotechniki i Elektroniki Przemysłowej Politechniki Krakowskiej. Zajmuje się teorią mocy w obwodach elektrycznych.