

**MOCE I KOMPENSACJA W OBWODACH Z OKRESOWYMI  
PRZEBIEGAMI PRĄDU I NAPIĘCIA**

**Część 6**

**Moce w niezrównoważonych obwodach trójfazowych  
z przebiegami sinusoidalnymi prądu i napięcia**

*Powers and Compensation in Circuits with Periodic  
Voltages and Currents*

*Part 6*

*Powers in Unbalanced Three-Phase Systems  
with Sinusoidal Voltages and Currents*

**Leszek S. CZARNECKI**

Louisiana State University, USA

*Streszczenie:* Przedmiotem artykułu są właściwości energetyczne trójprzewodowych obwodów trójfazowych z przebiegami sinusoidalnymi. Jest więc on ograniczony, w przeciwieństwie do poprzednich artykułów tej serii, do szczególnych przebiegów okresowych. Nie można jednak opisać i wyjaśnić właściwości energetycznych obwodów trójfazowych z przebiegami okresowymi bez poprawnego opisu i interpretacji zjawisk energetycznych w takich obwodach z przebiegami sinusoidalnymi.

Artykuł omawia i porównuje sposoby definiowania mocy pozornej w obwodach trójfazowych, pokazując, że powszechnie stosowane definicje tej mocy błędnie charakteryzują obciążenie źródeł zasilania w obwodach niezrównoważonych, to jest w obwodach różniących się impedancją faz odbiornika, a zatem prowadzą do błędnej wartości współczynnika mocy. Nie ma też obecnie przekonującej interpretacji zjawisk energetycznych w obwodach trójfazowych. W szczególności, nie można tłumaczyć obecności mocy biernej w takich obwodach oscylacją energii między źródłem zasilania a odbiornikiem. Opis i interpretacja zjawisk energetycznych w obwodach trójfazowych oparte są w niniejszym artykule na rozkładzie prądu zasilania takich odbiorników na trzy ortogonalne składowe energetyczne, mianowicie, na prąd czynny, bierny oraz *prąd niezrównoważenia*. Artykuł wprowadza ponadto pojęcia *admitancji równoważnej* oraz *admitancji niezrównoważenia* odbiornika trójfazowego, omawia także współczynnik mocy w takich układach i jego poprawę poprzez kompensację prądu biernego i prądu niezrównoważenia.

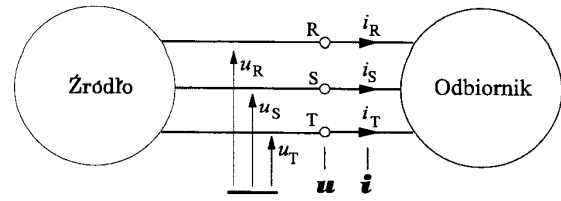
*Summary:* Power properties of three-wire, three-phase systems with sinusoidal voltages and currents are the subject of this paper. A faultless interpretation of these properties in such systems with sinusoidal voltages and currents is indispensable for their description and interpretation in systems with periodic voltages and currents. The paper discusses definitions of the apparent power in three-wire, three-phase systems and demonstrates, that the commonly used definitions of the apparent power describe erroneously the source loading in inbalanced systems. Also, the common interpretation of the power phenomena in three-phase systems is not convincing. In particular, the presence of the reactive power cannot be explained by the energy oscillation between the supply source and the load.

The interpretation of the power phenomena in three-phase systems is based on the supply current decomposition into three orthogonal current components, namely, the active, reactive and unbalanced currents. Also, the paper introduces the concept of the equivalent and unbalanced admittances of three-phase loads. The paper discusses, moreover, the power factor improvement in such systems by compensation of the reactive and unbalanced currents.

## 1. WPROWADZENIE

Energia elektryczna przenoszona jest od wytwórców do użytkowników głównie za pomocą linii trójfazowych; jedynie użytkownicy o niewielkich mocach zasilani są ze źródeł jednofazowych. Dlatego też, centralnym przedmiotem teorii mocy muszą być właściwości energetyczne obwodów trójfazowych, nie zaś obwodów jednofazowych. Trudno sobie jedynie wyobrazić, aby można było właściwości te poprawnie opisać, bez wcześniejszego zrozumienia właściwości energetycznych obwodów jednofazowych. Właśnie dlatego, trudności, jakie napotkało wyjaśnienie zjawisk energetycznych w obwodach jednofazowych, a szczególnie teoria mocy Budeanu, zaważyły niekorzystnie nad rozwojem teorii mocy obwodów trójfazowych z prądami niesinusoidalnymi. Teoria ta była rozwijana głównie [14–16] jako rozszerzenie teorii Budeanu, ze wszystkimi negatywnymi tego konsekwencjami, to znaczy z błędną interpretacją zjawisk fizycznych, analizowaną w artykule [4] i jej bezużytecznością w zagadnieniach poprawy współczynnika mocy. Rozwój ten utrudnił ponadto sposób definiowania mocy pozornej w takich obwodach. Mianowicie, w teorii mocy obwodów trójfazowych rozpowszechniły się definicje mocy pozornej zaproponowane w 1920 r., przez American Institute of Electrical Engineers (AIEE) [1], to jest arytmetycznej mocy pozornej oraz geometrycznej mocy pozornej, moce te nie mają bowiem cech mocy pozornej  $S$  w obwodach jednofazowych. Nie zauważa się jednak tego w obwodach zrównoważonych. Staje się to widoczne dopiero wtedy, gdy obwód trójfazowy jest niezrównoważony, i to już przy sinusoidalnych prądach i napięciach. Ponieważ teoria mocy musi zachować swą poprawność także wtedy, gdy obwód jest niezrównoważony, dlatego opis właściwości energetycznych obwodów trójfazowych z okresowymi przebiegami prądu i napięcia, musi być poprzedzony poprawnym opisem tych właściwości wtedy, gdy przebiegi te są sinusoidalne. Właściwości energetyczne linowych, niezrównoważonych obwodów trójfazowych z sinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia są dlatego przedmiotem niniejszego artykułu.

Obwody trójfazowe są bardziej złożone od jednofazowych, a więc wymagają bardziej złożonego opisu matematycznego. Opis ten może komplikować i utrudniać analizę oraz interpretację właściwości energetycznych takich obwodów, szczególnie, gdy na złożoność strukturalną nakłada się jeszcze złożoność przebiegów, tak jak ma to miejsce w przypadku przebiegów niesinusoidalnych. Dlatego też, aby złożoność obwodów trójfazowych nie komplikowała ich analizy, właściwości energetyczne takich obwodów opisywane są w niniejszym artykule za pomocą symboli wielkości trójfazowych i ich funkcjonałów wprowadzonych w pracy [5]. Aby zachować jednolity system symboli w kolejnych artykułach o właściwościach energetycznych obwodów trójfazowych, symbole te są zdefiniowane już w niniejszym artykule, jakkolwiek będą użyte w ograniczonym zakresie, gdyż artykuł ten dotyczy obwodów trójfazowych wyłącznie z przebiegami sinusoidalnymi.



Rys. 1. Oznaczenia prądów i napięć w trójprzewodowym obwodzie trójfazowym

## 2. SYMBOLE WIELKOŚCI TRÓJFAZOWYCH I ICH FUNKCJONAŁÓW

Zaciski źródeł i odbiorników trójfazowych w obwodach trójprzewodowych oznaczane są w tym artykule, tak jak jest to pokazane na rysunku 1, indeksami R, S oraz T. Gdy zachodzi potrzeba podkreślenia, że pewna wielkość elektryczna jest wartością chwilową, symbol tej wielkości jest pisany małą literą i wyrażany jako funkcja czasu, na przykład  $x(t)$ . Gdy nie zachodzi potrzeba podkreślenia, że jest to wartość chwilowa, symbol wielkości będzie uproszczony i pisany, na przykład, jako  $x$ .

W artykułach tej serii przyjmuje się, że wielkości (prądy lub napięcia) trójfazowe,  $x_R, x_S, x_T$  są wielkościami okresowymi o okresie  $T$ , a ponadto, że są one wielkościami *kolejności dodatniej*. Oznacza to, że określona faza tych przebiegów, na przykład wartość maksymalna, po jej pojawieniu się na zacisku R, obserwowana jest następnie na zacisku S i wreszcie na zacisku T. Przyjmuje się też, że napięcia i prądy trójfazowe nie mają składowej stałej. Pojawia się ona w obwodach trójfazowych w tak szczególnych sytuacjach, że nie ma powodu komplikowania symboli możliwością jej obecności w przebiegach prądu i napięcia.

Wielkości trójfazowe o przebiegach czasowych  $x_R(t), x_S(t), x_T(t)$ , mogą być przedstawione jako *wektor trójfazowy*,  $\mathbf{x}(t)$  lub  $\mathbf{x}$ , mianowicie:

$$\begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_S(t) \\ x_T(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \quad (1)$$

W szczególności, prądy i napięcia trójfazowe przedstawiane są w niniejszym artykule jako wektory:

$$\begin{bmatrix} u_R(t) \\ u_S(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix} = \mathbf{u}(t) = \mathbf{u} \quad \begin{bmatrix} i_R(t) \\ i_S(t) \\ i_T(t) \end{bmatrix} = \mathbf{i}(t) = \mathbf{i} \quad (2)$$

Iloczyn skalarny wektorów trójfazowych  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$  jest funkcjonałem oznaczanym i definiowanym jako:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{T} \int_0^T [x_R(t)y_R(t) + x_S(t)y_S(t) + x_T(t)y_T(t)] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T(t) \mathbf{y}(t) dt \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie górny indeks T oznacza transpozycję macierzy. Norma wektora trójfazowego definiowana jest jako:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T \mathbf{x} dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (x_R^2 + x_S^2 + x_T^2) dt} \quad (4)$$

Norma sumy dwóch wektorów trójfazowych  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  jest równa:

$$\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad (5)$$

Tak więc, normy wektorów trójfazowych  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  spełniają relacje:

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \quad (6)$$

tylko wtedy, gdy iloczyn skalarny tych wektorów:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T \mathbf{y} dt = 0 \quad (7)$$

jest równy zeru, to jest wtedy, gdy wektory te są wzajemnie *ortogonalne*.

Okresowe wielkości trójfazowe mogą być aproksymowane wielomianami trygonometrycznymi o postaci:

$$\begin{aligned} x_R(t) &= \sum_{n \in N} x_{Rn}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n \in N} X_{Rn} e^{jn\omega_1 t} \\ x_S(t) &= \sum_{n \in N} x_{Sn}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n \in N} X_{Sn} e^{jn\omega_1 t} \\ x_T(t) &= \sum_{n \in N} x_{Tn}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n \in N} X_{Tn} e^{jn\omega_1 t} \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie  $\omega_1$  jest kątową częstotliwością przebiegów,  $n$  jest rzędem harmonicznej,  $x_n$  jest harmoniczną  $n$ -tego rzędu,  $X_n$  jest jej zespoloną wartością skuteczną, a  $N$  jest zbiorem rzędów harmonicznych. Wektor trójfazowy  $\mathbf{x}(t)$  może być więc przedstawiony w postaci:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{n \in N} \mathbf{x}_n(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n \in N} \begin{bmatrix} X_{Rn} \\ X_{Sn} \\ X_{Tn} \end{bmatrix} e^{jn\omega_1 t} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n \in N} \mathbf{X}_n e^{jn\omega_1 t} \quad (9)$$

gdzie  $\mathbf{x}_n(t)$  jest wektorem wartości chwilowych harmonicznych  $n$ -tego rzędu wielkości trójfazowych, mianowicie:

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_{Rn}(t) \\ x_{Sn}(t) \\ x_{Tn}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\mathbf{X}_n$  zaś jest wektorem ich zespolonych wartości skutecznych.

Funkcjonały (3), (4) oraz warunek ortogonalności (7) zdefiniowane są w dziedzinie czasu. Obliczenie tych funkcjonałów wymaga całkowania. Zbiór rzędów harmonicznych  $N$  oraz wektorów  $\mathbf{X}_n$  określa przebiegi trójfazowe w dziedzinie częstotliwości. W dziedzinie częstotliwości mogą być też obliczane ich funkcjonały, takie jak iloczyn skalarny  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , norma  $\|\mathbf{x}\|$  oraz warunek ortogonalności (7). W szczególności, jak to wykazano w Aneksie, iloczyn skalarny wektorów  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$  może być obliczany jako:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{Re} \sum_{n \in N} \mathbf{X}_n^T \mathbf{Y}_n^* \quad (11)$$

gdzie gwiazdka oznacza wektor sprzężonych zespolonych wartości skutecznych harmonicznych  $n$ -tego rzędu wielkości trójfazowych. Odpowiednio, warunek ortogonalności wektorów  $\mathbf{x}(t)$  oraz  $\mathbf{y}(t)$  ma w dziedzinie częstotliwości postać:

$$\operatorname{Re} \sum_{n \in N} \mathbf{X}_n^T \mathbf{Y}_n^* = 0 \quad (12)$$

Ponieważ iloczyn:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X}^* = X_R^2 + X_S^2 + X_T^2$$

jest liczbą rzeczywistą, norma wektora trójfazowego  $\mathbf{x}(t)$  może być obliczana w dziedzinie częstotliwości jako:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{n \in N} \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n^*} = \sqrt{\sum_{n \in N} (X_{Rn}^2 + X_{Sn}^2 + X_{Tn}^2)} \quad (14)$$

Ponieważ wartość skuteczna przebiegu okresowego  $x(t)$ , bez składowej stałej, jest równa:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{n \in N} X_n^2} \quad (15)$$

zatem norma wektora trójfazowego  $\mathbf{x}(t)$  może być wyrażona poprzez wartości skuteczne wielkości trójfazowych jako:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{n \in N} (X_{Rn}^2 + X_{Sn}^2 + X_{Tn}^2)} = \sqrt{\|x_R\|^2 + \|x_S\|^2 + \|x_T\|^2} \quad (16)$$

### 3. MOC CHWILOWA

Elektryczna moc chwilowa  $p(t)$  odbiornika jest prędkością przepływu energii elektrycznej,  $W(t)$ , do tego odbiornika. Odbiorniki trójfazowe o parametrach skupionych, zasilane trójprzewodowo, są ograniczone pod względem elektrycznym trzema zaciskami R, S, T. Energia  $dW(t)$ , dostarczana do takiego odbiornika w czasie  $dt$ , określona jest napięciami na tych zaciskach  $[u_R(t), u_S(t), u_T(t)] = \mathbf{u}^T(t)$  oraz prądami w przewodach zasilających,  $[i_R(t), i_S(t), i_T(t)] = \mathbf{i}^T(t)$ , mianowicie:

$$dW(t) = [u_R(t)i_R(t) + u_S(t)i_S(t) + u_T(t)i_T(t)] dt = \mathbf{u}^T(t) \mathbf{i}(t) dt \quad (17)$$

zatem moc chwilowa takiego odbiornika jest równa:

$$p(t) = \frac{d}{dt} W(t) = u_R(t)i_R(t) + u_S(t)i_S(t) + u_T(t)i_T(t) = \mathbf{u}^T(t) \mathbf{i}(t) \quad (18)$$

Napięcia na zaciskach odbiornika nie są jednak wielkościami bezwzględными, lecz względnymi. Mogą być one określone względem dowolnego punktu przestrzeni, zwanego punktem odniesienia. Zmiana punktu odniesienia może zmienić każde z napięć na zaciskach o pewną wartość  $u_x(t)$ , zmieniając wyrażenie (18) na moc chwilową do postaci:

$$p(t) = [u_R(t) + u_x(t)]i_R(t) + [u_S(t) + u_x(t)]i_S(t) + [u_T(t) + u_x(t)]i_T(t) \quad (19)$$

Moc chwilowa pozostaje jednak nie zmieniona, gdyż:

$$u_x(t)[i_R(t) + i_S(t) + i_T(t)] \equiv 0 \quad (20)$$

niezależnie od wartości napięcia  $u_x(t)$ , a więc niezależnie od punktu odniesienia, względem którego określone jest napięcie na zaciskach odbiornika.

W pewnych pracach, dotyczących mocy w obwodach trójfazowych, pojedyncze iloczyny  $u_R(t)i_R(t)$ ,  $u_S(t)i_S(t)$ , oraz  $u_T(t)i_T(t)$  nazywane są mocami chwilowymi poszczególnych faz. Iloczyny te nie mogą być jednak traktowane jako moce chwilowe, ponieważ zaciski R, S oraz T, traktowane osobno, nie tworzą ograniczenia elektrycznego pojedynczych faz odbiornika. Energia dostarczana do pojedynczej fazy odbiornika nie jest określona, a zatem nie jest także określona jej pochodna, czyli moc chwilowa pojedynczej fazy. Ponadto, poszczególne iloczyny napięcia na zaciskach i prądu zasilania zależą od punktu odniesienia, względem którego określa

się to napięcie. Nie mają więc one jednoznacznej wartości, lecz zależą od wyboru punktu odniesienia. Jeśli jeden z zacisków R, S lub T, na przykład R, zostanie wybrany jako punkt odniesienia, to napięcie na tym zacisku  $u_R(t)$ , a więc i iloczyn  $u_R(t)i_R(t)$  będą stałe równe zero. Wartość tego iloczynu zmienia się ze zmianą punktu odniesienia, gdy jednocześnie zmiana tego punktu nie wpływa na zjawiska energetyczne w obwodzie.

### 4. WARTOŚĆ SKUTECZNA WIELKOŚCI TRÓJFAZOWYCH

Skutki cieplne prądu  $i$  w urządzeniu jednofazowym określone są wartością skuteczną tego prądu, oznaczanego w przypadku prądów sinusoidalnych symbolem  $I$  lub symbolem  $\|i\|$  w przypadku prądów niesinusoidalnych. Wartość skuteczną  $\|i\|$  prądu jest równa wartości prądu stałego  $I$  równoważnego prądowi  $i$  pod względem skutków cieplnych, przy założeniu, że rezystancja urządzenia, przez które prąd ten przepływa, nie zmienia się wraz z częstotliwością. Założenie takie jest tylko pewnym przybliżeniem sytuacji rzeczywistych, nawet w przypadku prądów sinusoidalnych, gdyż rezystancja przewodników dla prądu stałego jest inna niż dla prądu zmiennego, niemniej wartość skuteczną jest powszechnie stosowana do określania skutków cieplnych prądów, nawet jeśli są one określane z pewnym błędem, wynikającym ze zmiany rezystancji wraz z częstotliwością. W podobny sposób można określić skutki cieplne prądów  $i_R$ ,  $i_S$ ,  $i_T$  w urządzeniu trójfazowym. Mianowicie, można wprowadzić [5] pojęcie *wartości skutecznej*  $\|\mathbf{i}\|$  wektora prądów trójfazowych,  $\mathbf{i}$ , równej wartości prądu stałego  $I$  w jednej fazie odbiornika trójfazowego, równoważnego wektorowi prądów  $\mathbf{i} = [i_R, i_S, i_T]^T$  pod względem skutków cieplnych, to jest mocy czynnej odbiornika. Podobnie jak w przypadku prądów jednofazowych, wymaga to założenia, że rezystancja odbiornika nie zależy od rzędu harmonicznej, a ponadto, że urządzenie trójfazowe jest symetryczne.

Moc czynna urządzenia trójfazowego przedstawionego na rysunku 2a, o rezystancji faz  $R_R, R_S, R_T$  jest równa:

$$P = R_R \|i_R\|^2 + R_S \|i_S\|^2 + R_T \|i_T\|^2 \quad (21)$$

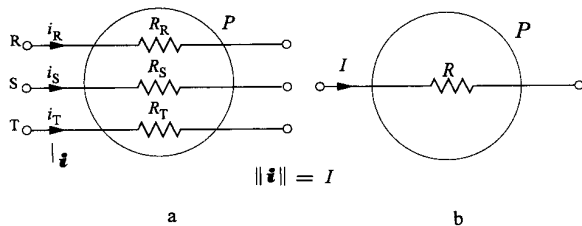
Urządzenia trójfazowe budowane są tak, aby utrzymana była wzajemna symetria faz. Można więc przyjąć, że  $R_R = R_S = R_T = R$ . Zatem:

$$P = R (\|i_R\|^2 + \|i_S\|^2 + \|i_T\|^2) = R \|\mathbf{i}\|^2 \quad (22)$$

a więc moc czynna  $P$  jest proporcjonalna do kwadratu normy wektora prądu  $\mathbf{i}$ . Taką samą moc czynną  $P$  ma urządzenie jednofazowe pokazane na rysunku 2b, o rezystancji  $R$  i prądzie stałym o wartości  $I$ , gdyż wtedy:

$$P = R I^2 \quad (23)$$

Prąd stały jest równoważny, ze względu na moc czynną  $P$ , prądom trójfazowym  $i_R(t)$ ,  $i_S(t)$  oraz  $i_T(t)$ , jeśli jego wartość  $I$  jest równa normie wektora  $\mathbf{i}$ .



Rys. 2. Rezystancyjne urządzenie trójfazowe (a) i urządzenie jednofazowe (b) z prądem równoważnym prądom trójfazowym ze względu na moc czynną

$$I = \|\mathbf{i}\| = \sqrt{\|i_R\|^2 + \|i_S\|^2 + \|i_T\|^2} \quad (24)$$

Wartość ta może być traktowana [5] jako *wartość skuteczna wektora prądu trójfazowego*.

W podobny sposób można zdefiniować wartość skuteczną  $\|\mathbf{u}\|$  wektora napięć trójfazowych  $u_R$ ,  $u_S$  oraz  $u_T$ , mianowicie:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\|u_R\|^2 + \|u_S\|^2 + \|u_T\|^2} \quad (25)$$

Jeśli jednak w trójfazowym, trójprzewodowym obwodzie:

$$i_R(t) + i_S(t) + i_T(t) \equiv 0 \quad (26)$$

to analogiczna relacja nie jest spełniona dla napięć trójfazowych. Suma napięć na zaciskach R, S i T obwodu trójfazowego zależy od wyboru punktu odniesienia, co oznacza, że dowolne napięcie  $u_x(t)$  może być dodane do napięć fazowych, zmieniając tym samym wartość wyrażenia (25). Napięcie  $u_x(t)$  w obwodzie trójprzewodowym nie powoduje jednak przepływu żadnego prądu i żadnych zjawisk energetycznych. Dlatego można przyjąć, że wyrażenie (25) definiuje wartość skuteczną napięć trójfazowych, jeśli punkt odniesienia wybrany jest w ten sposób, że:

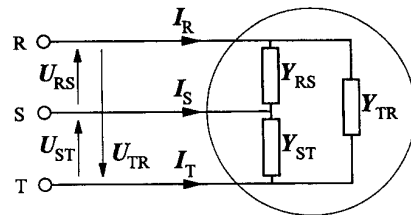
$$u_R(t) + u_S(t) + u_T(t) \equiv 0 \quad (27)$$

Spełnienie tego warunku wymaga także pominięcia w napięciu harmonicznych kolejności zerowej, które także nie powodują przepływu prądu w obwodzie trójprzewodowym.

## 5. MOC CZYNNA

Moc czynna odbiornika trójfazowego jest średnią prędkością przepływu energii elektrycznej ze źródła do odbiornika w jednym cyklu zmienności napięcia zasilania, to jest średnią wartością mocy chwilowej  $p(t)$ , mianowicie:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = (\mathbf{u}, \mathbf{i}) = \operatorname{Re} \mathbf{U}^T \mathbf{I}^* \quad (28)$$



Rys. 3. Odbiornik trójfazowy o fazach połączonych w trójkąt

Jeśli fazy odbiornika są połączone w trójkąt, jak jest to pokazane na rysunku 3, i mają impedancje równe odpowiednio  $Y_{RS}$ ,  $Y_{ST}$ ,  $Y_{TR}$ , to biorąc pod uwagę, że przy symetrycznym napięciu zasilania wartości skuteczne napięć międzyfazowych są sobie równe, tj.  $U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = \|\mathbf{u}\|$ , wyrażenie (28) na moc czynną może być przedstawione w postaci:

$$P = \operatorname{Re} \mathbf{U}^T \mathbf{I}^* = \operatorname{Re} (U_R I_R^* + U_S I_S^* + U_T I_T^*) = \quad (29)$$

$$= \operatorname{Re} (U_{RS} I_{RS}^* + U_{ST} I_{ST}^* + U_{TR} I_{TR}^*) = \operatorname{Re} (Y_{RS}^* + Y_{ST}^* + Y_{TR}^*) \|\mathbf{u}\|^2$$

Gdzie  $U$  z indeksem R, S lub T oznacza zespoloną wartość skuteczną napięcia na tych zaciskach,  $I$  zaś — zespoloną wartość skuteczną prądu poszczególnych linii zasilania.

## 6. MOC POZORNA

Inżynierowie elektrycy, pytani „co to jest moc pozorna w obwodzie trójfazowym przy przebiegach sinusoidalnych?” odpowiadają zwykle, że jest to wielkość obliczana ze wzoru:

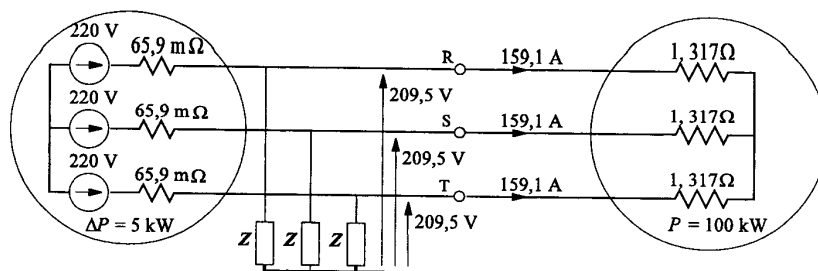
$$S_A = U_R I_R + U_S I_S + U_T I_T \quad (30)$$

Taka definicja mocy pozornej, nazwana *arytmetyczną mocą pozorną*, została zaproponowana w 1920 r. przez American Institute of Electrical Engineers (AIEE) [1]. Ten sam komitet zaproponował równocześnie inną definicję mocy pozornej, mianowicie:

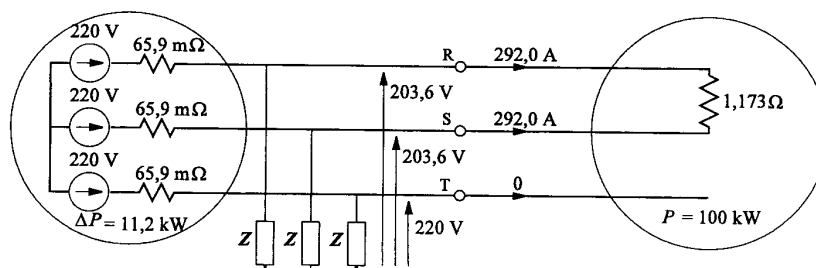
$$S_G = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (31)$$

gdzie  $P$  oznacza moc czynną,  $Q$  zaś — moc bierną w przekroju, w którym wyznacza się moc pozorną. Moc ta została nazwana *geometryczną mocą pozorną*. W obwodach zrównoważonych, to jest takich, w których przy symetrycznym napięciu zasilania prądy są symetryczne, nie ma liczbowej różnicy między tymi dwiema mocami i moc pozorna wyznaczana jest, zależnie od sytuacji, na podstawie definicji (30) lub (31). Inną definicję mocy pozornej w obwodach z przebiegami sinusoidalnymi zaproponował Buchholz [2] w roku 1922, mianowicie:

$$S_B = \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2} \sqrt{U_R^2 + U_S^2 + U_T^2} \quad (32)$$



Rys. 4. Przykład obwodu trójfazowego z odbiornikiem zrównoważonym



Rys. 5. Przykład obwodu trójfazowego z odbiornikiem niezrównoważonym o mocy czynnej  $P$  równej mocy czynnej odbiornika w obwodzie przedstawionym na rysunku 4

lecz definicja ta nie rozprzestrzeniła się w elektrotechnice tak, jak dwie poprzednie. W obwodach zrównoważonych moc pozorna wyznaczana wg definicji (32) jest równa arytmetycznej  $S_A$  oraz geometrycznej  $S_G$  mocy pozornej. Różnice między tymi mocami pojawiają się dopiero wtedy, gdy odbiornik nie jest zrównoważony, to jest wtedy, gdy prądy zasilania tracą wzajemną symetrię. Pojawiają się też różnice w wartości współczynnika mocy  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{P}{S} \quad (33)$$

gdzież zależy on od wyboru definicji mocy pozornej,  $S$ .

*Przykład 1a.* Symetryczny odbiornik rezystancyjny, przedstawiony na rysunku 4, zasilany jest z symetrycznego źródła napięcia sinusoidalnego o rezystancyjnej impedancji wewnętrznej. Parametry obwodu dobrane zostały w ten sposób, aby przy wartości skutecznej napięcia wewnętrznego źródła  $E_R = 220V$ , moc czynna odbiornika wynosiła  $P = 100$  kW przy stratach mocy w źródle  $\Delta P = 5$  kW. Odbiornik niezrównoważony, obciążający tylko dwie fazy źródła, ma taką samą moc czynną jak odbiornik zrównoważony, to jest  $P = 100$  kW, wtedy, gdy jego rezystancja międzyfazowa jest równa  $R = 1,173$  W. Wartości skuteczne prądów i napięć na zaciskach źródła podane są na rysunku 5. Moc pozorna źródła, zależnie od przyjętej definicji, oraz współczynnik mocy  $\lambda$  są równe, odpowiednio:

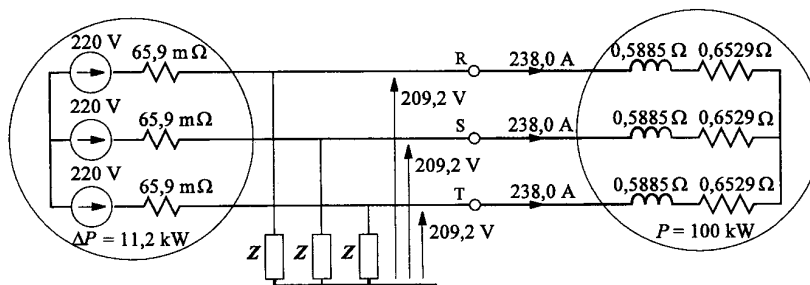
$$S_A = 119 \text{ kVA}, \quad \lambda_A = 0,84$$

$$S_G = 100 \text{ kVA}, \quad \lambda_G = 1$$

$$S_B = 149,6 \text{ kVA}, \quad \lambda_B = 0,67$$

Moc pozorna w obwodach trójfazowych, podobnie jak i w obwodach jednofazowych, oraz współczynnik mocy nie są wielkościami fizycznymi, lecz umownymi. Służą one głównie jako pewna miara wielkości źródła ze względu na dostarczane napięcie i jego dopuszczalne obciążenie prądowe. Określa wówczas moc znamionową źródła. Może to być także miara aktualnego obciążenia źródła ze względu na dostarczane napięcie i jego aktualne obciążenie prądowe. Nie jest jednak bezpośrednio jasne, która z obliczonych w *Przykładzie 1a* mocy pozornych najlepiej charakteryzuje obciążenie źródła w przypadku odbiornika niezrównoważonego.

Miarą obciążenia źródła zasilania może być wzrost strat mocy czynnej w źródle,  $\Delta P$ . W sytuacji analizowanej w *Przykładzie 1a* straty te w warunkach obciążenia niezrównoważonego wzrosły z 5 kW do 11,2 kW. W obwodach z odbiornikami zrównoważonymi nie ma różnicy między wartościami mocy pozornej obliczanej z definicji (30) (31) lub (32). Dlatego wybór najlepszej definicji ze względu na oszacowanie wewnętrznych strat mocy czynnej można oprzeć na porównaniu tych trzech mocy,  $S_A$ ,  $S_G$  oraz  $S_B$  z mocą pozorną źródła obciążonego odbiornikiem zrównoważonym, który po-



Rys. 6. Przykład obwodu trójfazowego ze zrównoważonym czynno-indukcyjnym odbiornikiem o mocy czynnej  $P$  i stratach mocy w źródle  $\Delta P$  takich samych jak w obwodzie przedstawionym na rysunku 5

woduje takie same straty mocy czynnej  $\Delta P$  jak odbiornik niezrównoważony o takiej samej mocy czynnej  $P$  przy zasilaniu z tego samego źródła.

*Przykład 1b.* Rezystancyjny odbiornik niezrównoważony, analizowany w *Przykładzie 1a*, jest równoważny, ze względu na straty mocy czynnej w źródle  $\Delta P = 11,2$  kW, rezystancyjno-indukcyjnemu odbiornikowi zrównoważonemu o impedancji fazowej  $Z = 0,879 e^{j48,00} \Omega$ , przedstawionemu na rysunku 6. Odbiornik taki ma współczynnik mocy  $\lambda = \cos(48,0^\circ) = 0,67$  i obciąża źródło mocą pozorną  $S = 149,4$  kVA.

Wyniki powyższego przykładu wskazują na to, że pomimo powszechnego traktowania mocy pozornej w obwodach trójfazowych jako mocy arytmetycznej,  $S_A$ , nie charakteryzuje ona poprawnie rzeczywistego obciążenia źródła odbiornikiem niezrównoważonym. Jeszcze gorzej obciążenie to charakteryzuje geometryczna moc pozorna  $S_G$ , która zupełnie nie uwzględnia wpływu asymetrii prądów na stopień obciążenia. Poprawnie obciążenie to określa jedynie moc pozorna zdefiniowana wzorem (32).

## 7. MOC BIERNA

Moc bierną  $Q$  w obwodach jednofazowych z przebiegami sinusoidalnymi, obliczaną ze wzoru:

$$Q = UI \sin\varphi \quad (34)$$

gdzie  $\varphi$  jest kątem fazowym impedancji odbiornika, można interpretować jako amplitudę składowej oscylacyjnej mocy chwilowej  $p(t)$ , to jest jako pewną miarę oscylacji energii między źródłem a odbiornikiem. Wynika to stąd, że jeśli odbiornik zasilany napięciem  $u(t) = \sqrt{2} U \cos\omega_1 t$  ma prąd o przebiegu  $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega_1 t - \varphi)$ , to jego moc chwilowa może być przedstawiona w postaci:

$$p(t) = P[1 + \cos 2\omega_1 t] + Q \sin 2\omega_1 t \quad (35)$$

Właściwość ta może być traktowana jako fizyczna interpretacja mocy biernej w obwodach jednofazowych. Niestety, w obwodach trójfazowych interpretacja ta nie jest już poprawna, nawet w przypadku obwodów zrównoważonych, w których moc bierna ma wartość:

$$Q = 3 U_R I_R \sin\varphi \quad (36)$$

Wynika to stąd, że moc chwilowa  $p(t)$  zrównoważonego odbiornika trójfazowego jest wielkością niezmienną w czasie. Mianowicie, jeśli napięcie fazy R jest równe  $u_R(t) = \sqrt{2} U_R \cos\omega_1 t$  oraz jeśli napięcia zasilania tworzą układ kolejności dodatniej, to moc chwilowa takiego odbiornika jest równa:

$$\begin{aligned} p(t) &= u_R(t)i_R(t) + u_S(t)i_S(t) + u_T(t)i_T(t) = \\ &= 2U_R I_R \left[ \cos\omega_1 t \cos(\omega_1 t - \varphi) + \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega_1 t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega_1 t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \right] = 3U_R I_R \cos\varphi = \text{const.} \end{aligned} \quad (37)$$

Tak więc *nie ma związku między mocą bierną  $Q$  odbiornika trójfazowego a jego mocą chwilową,  $p(t)$* , to jest prędkością przepływu energii między źródłem zasilania a odbiornikiem. Szczególnie, dość powszechny pogląd, że moc bierna jest pewną miarą oscylacji energii między źródłem zasilania a odbiornikiem, nie jest w przypadku obwodów trójfazowych poprawny, dlatego, że moc chwilowa odbiornika zrównoważonego nie posiada składowej oscylacyjnej, niezależnie od wartości mocy biernej.

Jakkolwiek moc bierna odbiornika trójfazowego nie może być interpretowana jako miara oscylacji energii między źródłem i odbiornikiem, obciąża ona źródło obniżając jego współczynnik mocy. Ponieważ spełnia zasadę bilansu, może być obliczana jako suma mocy biernych wszystkich elementów obwodu. Zwłaszcza moc bierna odbiornika trójfazowego o fazach połączonych w trójkąt może być obliczana jako suma mocy biernych poszczególnych faz. Przy symetrycz-

nym napięciu zasilania jest ona równa:

$$Q = \text{Im}(\mathbf{U}_{RS} \mathbf{I}_{RS}^* + \mathbf{U}_{ST} \mathbf{I}_{ST}^* + \mathbf{U}_{TR} \mathbf{I}_{TR}^*) =$$

$$= \text{Im}(\mathbf{Y}_{RS}^* + \mathbf{Y}_{ST}^* + \mathbf{Y}_{TR}^*) \|\mathbf{u}\|^2 \quad (38)$$

Postać tego wyrażenia sugeruje możliwość traktowania mocy biernej  $Q$  jako sumy trzech mocy biernych stowarzyszonych osobno z trzema prądami i napięciami zasilania. Jest to jednak złudne, gdyż jak wykazano w artykule [3] każdy niezrównoważony odbiornik trójfazowy ma nieskończenie wiele odbiorników równoważnych ze względu na prądy przewodowe, różniących się admitancjami  $\mathbf{Y}_{RS}$ ,  $\mathbf{Y}_{ST}$  oraz  $\mathbf{Y}_{TR}$ , a tym samym różniących się prądami  $\mathbf{I}_{RS}$ ,  $\mathbf{I}_{ST}$  oraz  $\mathbf{I}_{TR}$ . Dlatego moc bierna odbiornika trójfazowego musi być traktowana jako niepodzielna całość, nawet wtedy, jeśli dla pewnego odbiornika złożonego z trzech jednofazowych odbiorników, połączonych na przykład w trójkąt, może być ona obliczana jako suma mocy biernych poszczególnych odbiorników.

Sens fizyczny mocy biernej, jakkolwiek nie może być wyjaśniony właściwościami przepływu energii między źródłem a odbiornikiem, może być w pewnym stopniu wyjaśniony właściwościami prądu zasilania odbiornika trójfazowego, a dokładniej — obecnością w nim prądu biernego.

## 8. SKŁADOWE ENERGETYCZNE PRĄDU TRÓJFAZOWEGO

Zespolone wartości skuteczne prądów zasilania odbiornika trójfazowego zasilanego symetrycznym napięciem kolejności dodatniej, to jest takim, którego zespolone wartości skuteczne spełniają warunek:

$$\mathbf{U}_S = \alpha^* \mathbf{U}_R, \quad \mathbf{U}_T = \alpha \mathbf{U}_R \quad (39)$$

gdzie  $\alpha = 1e^{j\frac{2\pi}{3}}$  jest zespolonym współczynnikiem obrotu,  $\alpha^*$  zaś jego wartością sprzężoną, można wyrazić w sposób następujący:

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{Y}_{RS}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_S) - \mathbf{Y}_{TR}(\mathbf{U}_T - \mathbf{U}_R) =$$

$$= [(\mathbf{Y}_{RS} + \mathbf{Y}_{ST} + \mathbf{Y}_{TR}) - (\mathbf{Y}_{ST} + \alpha \mathbf{Y}_{TR} + \alpha^* \mathbf{Y}_{RS})] \mathbf{U}_R$$

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{Y}_{ST}(\mathbf{U}_S - \mathbf{U}_T) - \mathbf{Y}_{RS}(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_S) =$$

$$= [(\mathbf{Y}_{RS} + \mathbf{Y}_{ST} + \mathbf{Y}_{TR}) - \alpha^*(\mathbf{Y}_{ST} + \alpha \mathbf{Y}_{TR} + \alpha^* \mathbf{Y}_{RS})] \mathbf{U}_S \quad (40)$$

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{Y}_{TR}(\mathbf{U}_T - \mathbf{U}_R) - \mathbf{Y}_{ST}(\mathbf{U}_S - \mathbf{U}_T) =$$

$$= [(\mathbf{Y}_{RS} + \mathbf{Y}_{ST} + \mathbf{Y}_{TR}) - \alpha(\mathbf{Y}_{ST} + \alpha \mathbf{Y}_{TR} + \alpha^* \mathbf{Y}_{RS})] \mathbf{U}_T$$

Oznaczając:

$$\mathbf{Y}_{RS} + \mathbf{Y}_{ST} + \mathbf{Y}_{TR} = \mathbf{Y}_e = G_e + jB_e \quad (41)$$

$$-(\mathbf{Y}_{ST} + \alpha \mathbf{Y}_{TR} + \alpha^* \mathbf{Y}_{RS}) = \mathbf{A} = Ae^{j\psi} \quad (42)$$

wektor zespolonych wartości skutecznych prądów zasilania można przedstawić, jak następuje:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_R \\ \mathbf{I}_S \\ \mathbf{I}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_e + \mathbf{A} \\ \mathbf{Y}_e + \mathbf{A}\alpha^* \\ \mathbf{Y}_e + \mathbf{A}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{U}_S \\ \mathbf{U}_T \end{bmatrix} \quad (43)$$

lub:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_e \mathbf{U} + \mathbf{A} \mathbf{a} \mathbf{U} \quad (44)$$

gdzie:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (45)$$

Wektor prądów zasilania odbiornika:

$$\mathbf{i} = \sqrt{2} \text{Re} \mathbf{I} e^{j\omega_1 t} = \sqrt{2} \text{Re} \{ (G_e + jB_e) \mathbf{U} + \mathbf{A} \mathbf{a} \mathbf{U} \} e^{j\omega_1 t} \quad (46)$$

można rozłożyć na trzy składowe, mianowicie:

$$\mathbf{i}_a = \sqrt{2} \text{Re} \mathbf{I}_a e^{j\omega_1 t} = \sqrt{2} \text{Re} G_e \mathbf{U} e^{j\omega_1 t} = G_e \mathbf{u} \quad (47)$$

$$\mathbf{i}_r = \sqrt{2} \text{Re} \mathbf{I}_r e^{j\omega_1 t} = \sqrt{2} \text{Re} jB_e \mathbf{U} e^{j\omega_1 t} = B_e \frac{d}{d(\omega_1 t)} \mathbf{u} \quad (48)$$

$$\mathbf{i}_u = \sqrt{2} \text{Re} \mathbf{I}_u e^{j\omega_1 t} = \sqrt{2} \text{Re} \mathbf{A} \mathbf{a} \mathbf{U} e^{j\omega_1 t} \quad (49)$$

takie, że:

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u \quad (50)$$

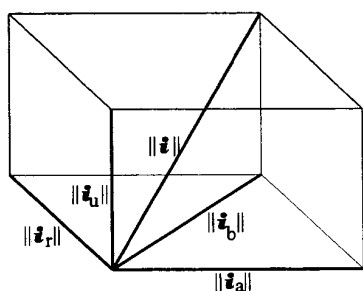
Wektory te są wzajemnie ortogonalne, gdyż:

$$(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_a) = \text{Re} \{ \mathbf{I}_r^T \mathbf{I}_a \} = \text{Re} \{ jB_e \mathbf{U}^T G_e \mathbf{U} \} = \text{Re} \{ jB_e G_e \|\mathbf{u}\|^2 \} = 0 \quad (51)$$

$$(\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_u) = \text{Re} \{ \mathbf{I}_a^T \mathbf{I}_u \} = \text{Re} \{ G_e \mathbf{U}^T \mathbf{A}^* \mathbf{a} \mathbf{U} \} = 0 \quad (52)$$

ponieważ:





Rys. 7. Prostopadłościan wartości skutecznych składowych wektora prądu zasilania odbiornika trójfazowego

$$\mathbf{U}^T \mathbf{a}^* \mathbf{U}^* = [U_R, U_S, U_T] \begin{bmatrix} U_R^* \\ \alpha U_S^* \\ \alpha^* U_T^* \end{bmatrix} = (1 + \alpha + \alpha^*) U_R^2 = 0 \quad (53)$$

Podobnie:

$$(\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_u) = \text{Re} \{ \mathbf{i}_r^T \mathbf{i}_u^* \} = \text{Re} \{ j B_e \mathbf{U}^T \mathbf{A}^* \mathbf{a}^* \mathbf{U}^* \} = 0 \quad (54)$$

Wartości skuteczne prądów  $\mathbf{i}_a$ ,  $\mathbf{i}_r$ , oraz  $\mathbf{i}_u$ , równe odpowiednio:

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\| \quad (55)$$

$$\|\mathbf{i}_r\| = |B_e| \|\mathbf{u}\| \quad (56)$$

$$\|\mathbf{i}_u\| = A \|\mathbf{u}\| \quad (57)$$

spełniają zatem relację:

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2 \quad (58)$$

Jest to taka sama relacja, jak relacja między długością prostopadłościanu, pokazanego na rysunku 7, a długościami jego krawędzi.

Biorąc pod uwagę relację (29), iloczyn wartości skutecznych prądów  $\mathbf{i}_a$  oraz wartości skutecznej napięcia  $\|\mathbf{u}\|$  jest równy mocy czynnej odbiornika:

$$\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\|^2 = \text{Re} (Y_{RS}^* + Y_{ST}^* + Y_{TR}^*) \|\mathbf{u}\|^2 = P \quad (59)$$

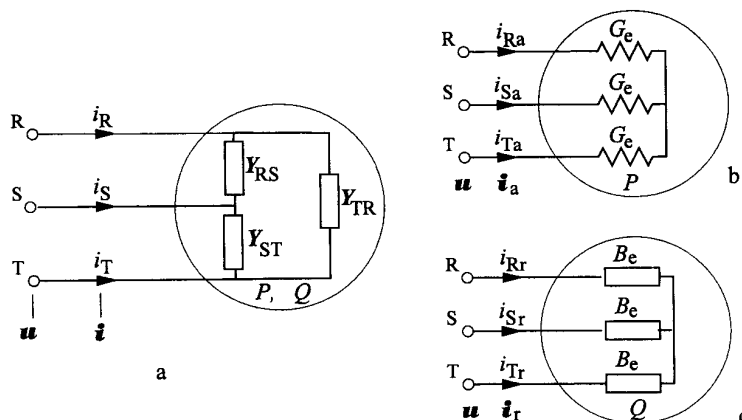
Dlatego składowa  $\mathbf{i}_a$  została nazwana [5] *prądem czynnym* (active current) odbiornika trójfazowego. Podobnie, z uwagi na relację (38), iloczyn:

$$\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_r\| = |B_e| \|\mathbf{u}\|^2 = |\text{Im} (Y_{RS}^* + Y_{ST}^* + Y_{TR}^*)| \|\mathbf{u}\|^2 = |Q|^2 \quad (60)$$

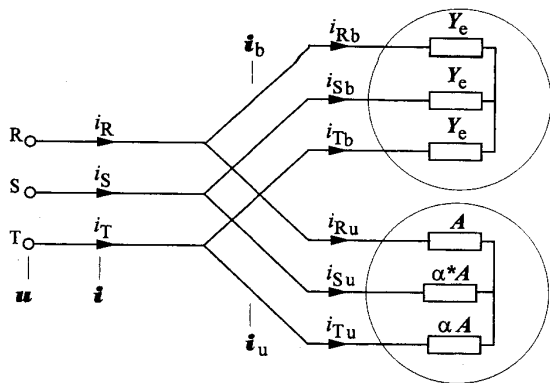
jest równy modułowi mocy biernej odbiornika. Dlatego składowa  $\mathbf{i}_r$  została nazwana [5] *prądem biernym* (reactive current) odbiornika trójfazowego. Jak wynika z definicji prądu czynnego (47) i prądu biernego (48), są to prądy symetryczne, o takiej samej kolejności jak napięcie zasilania, to jest kolejności dodatniej. Są to prądy odbiorników symetrycznych, pokazanych na rysunkach 8b, i 8c, równoważnych, ze względu na moc czynną  $P$  i moc bierną  $Q$ , odbiornikowi niezrównoważonemu, pokazanemu na rysunku 8a. Suma tych dwóch prądów,  $\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_b$ , jest prądem zasilania odbiornika symetrycznego o admitancji fazowej, równej  $Y_e = G_e + jB_e$ , pokazanego na rysunku 9, równoważnego odbiornikowi niezrównoważonemu pod względem mocy czynnej i biernej. Dlatego admitancja ta została nazwana [5] *admitancją równoważną* (equivalent admittance) odbiornika trójfazowego.

Ostatnia ze składowych prądu odbiornika,  $\mathbf{i}_u$ , tworzy również układ symetryczny, lecz o kolejności przeciwnej do kolejności napięć zasilania, gdyż:

$$\mathbf{I}_u = \begin{bmatrix} I_{uR} \\ I_{uS} \\ I_{uT} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_R \\ U_S \\ U_T \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_R \\ \alpha^* U_S \\ \alpha U_T \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_R \\ U_T \\ U_S \end{bmatrix} \quad (61)$$



Rys. 8. Odbiornik trójfazowy (a) o mocy czynnej  $P$  i mocy biernej  $Q$ ; odbiornik symetryczny (b), równoważny mu ze względu na moc czynną  $P$ , oraz odbiornik symetryczny (c) równoważny mu ze względu na moc bierną  $Q$



Rys. 9. Obwód równoważny liniowego odbiornika trójfazowego

Składowa ta pojawia się w prądzie zasilania odbiornika wtedy, gdy współczynnik  $A$ , mający wymiar admitancji, jest różny od zera. Jest on równy zero tylko wtedy, gdy  $Y_{RS} = Y_{ST} = Y_{TR}$ , to jest wtedy, gdy odbiornik jest zrównoważony, gdyż w takim przypadku:

$$A = -(1 + \alpha + \alpha^*) Y_{RS} = 0 \quad (62)$$

Współczynnik ten jest różny od zera jedynie w obwodach niezrównoważonych, powodując pojawienie się składowej  $\mathbf{i}_u$ , nazwanej w pracy [5] *prądem niezrównoważenia* (unbalanced current). Jest on *admitancją niezrównoważenia* (unbalanced admittance) odbiornika. Prąd niezrównoważenia, podobnie jak prąd bierny, jest ortogonalny względem napięcia zasilania, nie bierze więc udziału w przenoszeniu energii ze źródła do odbiornika. Powiększa jedynie, tak jak i prąd bierny, wartość skuteczną prądu zasilania odbiornika, a tym samym straty mocy czynnej w źródle zasilania. Obwód równoważny odbiornika niezrównoważonego przedstawiony jest na rysunku 9.

Jakkolwiek składowa bierna  $\mathbf{i}_r$  i składowa niezrównoważenia  $\mathbf{i}_u$  wektora prądu zasilania nie biorą udziału w przenoszeniu energii, określają, wraz z prądem czynnym, właściwości energetyczne obwodu, a przede wszystkim moc pozorną źródła i wewnętrzne straty energii. Dlatego składowe te nazywane są w tym artykule *składowymi energetycznymi* prądu zasilania.

*Przykład 2a.* Niezrównoważony odbiornik trójfazowy pokazany na rysunku 10, zasilany jest napięciem symetrycznym o wartości skutecznej napięcia fazowego  $U_R = 220$  V. Impedancja źródła jest dla uproszczenia pominięta. Ponieważ wartości skuteczne prądów zasilania są równe, odpowiednio,  $I_R = I_T = 134,7$  A oraz  $I_S = 0$ , wartość skuteczna wektora tych prądów jest równa:

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{I_R^2 + I_S^2 + I_T^2} = 134,7\sqrt{2} = 190,5 \text{ A}$$

Ponieważ  $Y_{RS} = Y_{ST} = 0$ , zatem admitancja równoważna odbiornika  $Y_e$  ma wartość:

$$Y_e = G_e + jB_e = Y_{TR} = \frac{1}{2 + j2} = 0,25 - j0,25 = 0,3536 e^{-j45^\circ} \text{ S}$$

natomiast impedancja niezrównoważenia jest równa:

$$A = -\alpha Y_{TR} = -1 e^{j250^\circ} \cdot 0,3536 e^{-j45^\circ} = 0,3536 e^{-j105^\circ} \text{ S}$$

Wektor napięcie zasilania ma wartość skuteczną  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3} U_R = 220\sqrt{3} = 381$  V, zatem wartości skuteczne prądu czynnego, biernego i prądu niezrównoważenia są odpowiednio równe:

$$\|\mathbf{i}_a\| = G_e \|\mathbf{u}\| = 0,25 \cdot 381 = 95,25 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_r\| = |B_e| \|\mathbf{u}\| = 0,25 \cdot 381 = 95,25 \text{ A}$$

$$\|\mathbf{i}_u\| = A \|\mathbf{u}\| = 0,3536 \cdot 381 = 134,7 \text{ A}$$

Pierwiastek z sumy kwadratów tych wartości skutecznych jest oczywiście równy wartości skutecznej wektora prądów zasilania, mianowicie:

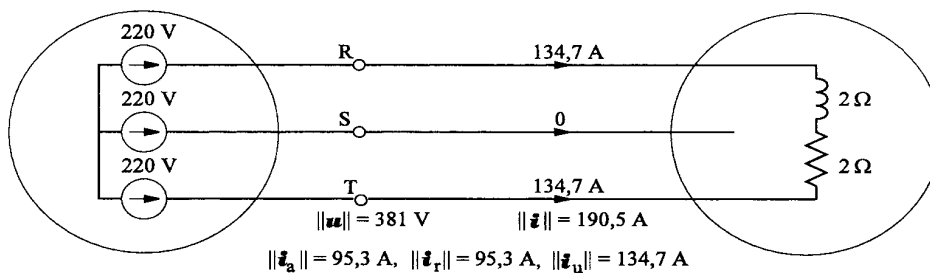
$$\begin{aligned} \sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2} &= \sqrt{95,25^2 + 95,25^2 + 134,7^2} = \\ &= 190,5 \text{ A} \end{aligned}$$

Prąd czynny  $\mathbf{i}_a$  jest składową energetyczną niezbędną dla przenoszenia energii ze źródła do odbiornika. Pozostałe dwie składowe, prąd bierny  $\mathbf{i}_r$  i prąd niezrównoważenia  $\mathbf{i}_u$ , związane są z pewnymi cechami odbiornika nie mającymi nic wspólnego z jego mocą czynną. Nie ma natomiast żadnej różnicy między skutkami cieplnymi obu tych prądów w źródle zasilania. Różnią się jednak one co do wywoływanego spadku napięcia na impedancji wewnętrznej źródła, mianowicie prąd niezrównoważenia powoduje spadek napięcia kolejności ujemnej a, więc asymetrię napięcia zasilającego.

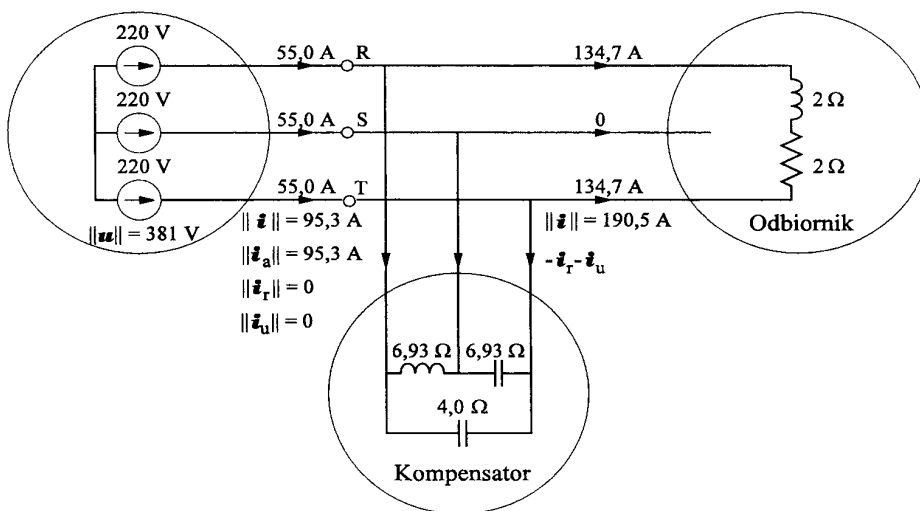
Z definicji (28) mocy czynnej  $P$  wynika, że jest ona iloczynem skalarnym wektorów napięcia i prądu odbiornika. Dlatego też, tylko składowa wektora prądu proporcjonalna do wektora napięcia, to jest składowa czynna,  $\mathbf{i}_a = G_e \mathbf{u}$ , bierze udział w nieodwracalnym przepływie energii ze źródła do odbiornika. Pozostałe składowe wektora prądu są ortogonalne względem napięcia, gdyż ich iloczyny skalarne ( $\mathbf{i}_r, \mathbf{u}$ ) oraz ( $\mathbf{i}_u, \mathbf{u}$ ) są równe zero. Nie biorą więc one udziału w nieodwracalnym przepływie energii do odbiornika. Ortogonalność wektora prądu biernego  $\mathbf{i}_r$  wynika z przesunięcia tego prądu względem napięcia zasilania o ćwierć okresu. Wektor prądu niezrównoważenia  $\mathbf{i}_u$  jest ortogonalny względem wektora napięcia  $\mathbf{u}$ , gdyż różnią się one kolejnością wielkości fazowych.

## 9. MOCE I WSPÓŁCZYNNIK MOCY

Mnożąc równanie (58) przez kwadrat wartości skutecznej wektora napięcie zasilania  $\|\mathbf{u}\|$ :



Rys. 10. Przykład obwodu trójfazowego z odbiornikiem niezrównoważonym



Rys. 11. Przykład obwodu trójfazowego z odbiornikiem niezrównoważonym i kompensatorem reaktancyjnym, kompensującym prąd bierny i prąd niezrównoważenia

$$\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{i}_u\|^2 \quad (63)$$

otrzymuje się rozkład mocy pozornej na moc czynną  $P$ , bierną  $Q$  oraz nową wielkość energetyczną,  $D_u$ , zwaną *mocą niezrównoważenia*, mianowicie:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2 \quad (64)$$

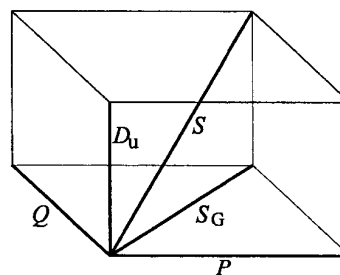
gdzie moc bierna  $Q$  oraz moc niezrównoważenia zdefiniowane są jako:

$$Q = -\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_r\| \operatorname{sgn}(B_e) \quad (65)$$

$$D_u = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_u\| \quad (66)$$

Relację (64) ilustruje *prostopadłośćian mocy* przedstawiony na rysunku 12, o proporcjach boków takich samych, jak proporcje prostopadłościanu wartości skutecznych prądów.

W odróżnieniu od mocy czynnej czy mocy chwilowej, moc bierna  $Q$  i moc niezrównoważenia  $D_u$ , nie mają, jak się wydaje, interpretacji fizycznej. Podobnie jak moc pozorna



Rys. 12. Prostopadłośćian mocy odbiornika trójfazowego

$S$ , są to jedynie iloczyny wartości skutecznych wektorów napięcia i składowych prądów. Pomimo tego, moce te dostarczają informacji o wzroście obciążenia źródła zasilania wskutek przesunięcia fazowego między prądem a napięciem odbiornika oraz wskutek jego niezrównoważenia.

Składowe energetyczne prądu, składowe mocy pozornej, a także, zdefiniowane wzorami (41) oraz (42), admitancja równoważna i admitancja niezrównoważenia odbiornika pozwalają głębiej wniknąć w sens współczynnika mocy niż tradycyjne ujęcie teorii mocy obwodów trójfazowych. Współczynnik mocy, to jest stosunek mocy czynnej do mocy po-

zornej źródła zasilania, może być bowiem wyrażony na kilka sposobów, ujawniających przyczyny, dla których współczynnik ten może być mniejszy od jedności. Może on być określony nie tylko poprzez moce składowe, to jest jako:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D_u^2}} \quad (67)$$

lecz także poprzez wartości skuteczne składowych energetycznych prądu, a także poprzez parametry równoważne odbiornika, mianowicie:

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{i}_a\|}{\sqrt{\|\mathbf{i}_a\|^2 + \|\mathbf{i}_r\|^2 + \|\mathbf{i}_u\|^2}} = \frac{G_e}{\sqrt{G_e^2 + B_e^2 + A^2}} \quad (68)$$

Wyrażenia te pokazują, że niezrównoważenie odbiornika wpływa na współczynnik mocy tak samo jak jego moc bierna.

*Przykład 2b.* Moc czynna, bierna oraz moc niezrównoważenia odbiornika analizowanego w *Przykładzie 2a* są równe, odpowiednio:

$$P = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_a\| = 381 \cdot 95,25 = 36,3 \text{ kW}$$

$$Q = -\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_r\| \operatorname{sgn}(B_e) = 381 \cdot 95,25 = 36,3 \text{ kVAR}$$

$$D_u = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}_u\| = 381 \cdot 134,7 = 51,3 \text{ kVA}$$

Moc pozorna źródła zasilania ma wartość  $S = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{i}\| = 381 \cdot 190,5 = 72,6 \text{ kVA}$ , a jego współczynnik mocy,  $\lambda = 0,5$ .

## 10. KOMPENSACJA PRĄDU BIERNEGO I NIEZRÓWNOWAŻENIA

Zmniejszenie strat mocy czynnej i spadku napięcia w źródle zasilania wymaga redukcji prądu zasilania przy zachowaniu mocy czynnej odbiornika. Można to uzyskać redukując prąd bierny, prąd niezrównoważenia źródła lub oba te prądy, to znaczy poprawiając współczynnik mocy. W szczególności, przy całkowitej redukcji tych prądów, współczynnik mocy  $\lambda$  staje się równy jedności.

Prąd bierny  $\mathbf{i}_r$  i prąd niezrównoważenia  $\mathbf{i}_u$  źródła zasilania można całkowicie zredukować włączając na zaciski tego źródła odbiornik, zwany kompensatorem, obciążający źródło ujemnym prądem biernym i ujemnym prądem niezrównoważenia, to jest prądami  $-\mathbf{i}_r$  i  $-\mathbf{i}_u$ , kompensując w ten sposób wszystkie, poza prądem czynnym, składowe prądy zasilania. Kompensator taki nie powinien oczywiście obciążać źródła prądem czynnym. Kompensację tych prądów można uzyskać czasowo-niezmienniczym obwodem reaktancyjnym lub obwodem z przełącznikami, kształtującymi prąd kompensujący na drodze elektronicznej, zwanymi pod nazwą kompensatorów lub filtrów aktywnych, jakkolwiek kompensatory takie nie są w istocie obwodami aktywnymi, gdyż nie są źródłami energii.

Czasowo-niezmiennicze kompensatory reaktancyjne zrównoważonych odbiorników trójfazowych projektowane są podobnie jak kompensatory odbiorników jednofazowych. Równoważenie odbiorników niezrównoważonych można osiągnąć natomiast tak, jak to pokazano w pracach [9-12], stosując metodę składowych symetrycznych, rozwiniętą przez Fortesque [7]. Procedury te są dość złożone. Można je znacznie uprościć stosując teorię mocy obwodów trójfazowych przedstawioną w niniejszym artykule. Podstawy matematyczne projektowania obwodu reaktancyjnego, kompensującego prąd bierny oraz prąd niezrównoważenia odbiornika są następujące.

Jeśli pominiemy straty mocy czynnej w gałęziach kompensatora, to jest ich konduktancje, wówczas, przy połączeniu gałęzi kompensatora w trójkąt, ich admitancja ma tylko część urojoną, susceptancję, oznaczaną w tym artykule, dla odróżnienia jej od susceptancji odbiornika, symbolami  $T_{RS}$ ,  $T_{ST}$ ,  $T_{TR}$ . Kompensator obciąża źródło prądem  $-(\mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u)$  wtedy, i tylko wtedy, gdy jego susceptancje spełniają warunki:

$$T_{RS} + T_{ST} + T_{TR} = -B_e \quad (69)$$

$$(jT_{ST} + \alpha jT_{TR} + \alpha^* jT_{RS}) = \mathbf{A} = \operatorname{Re} \mathbf{A} + j \operatorname{Im} \mathbf{A} \quad (70)$$

Drugie z tych równań musi być spełnione ze względu na część rzeczywistą i część urojoną admitancji niezrównoważenia,  $\mathbf{A} = \operatorname{Re} \mathbf{A} + j \operatorname{Im} \mathbf{A}$ . Oznacza to, że układ równań (69) (70) ma ze względu na susceptancje kompensatora  $T_{RS}$ ,  $T_{ST}$ ,  $T_{TR}$  jedno rozwiązanie, mianowicie:

$$T_{RS} = \frac{1}{3} (\sqrt{3} \operatorname{Re} \mathbf{A} - \operatorname{Im} \mathbf{A} - B_e)$$

$$T_{ST} = \frac{1}{3} (2 \operatorname{Im} \mathbf{A} - B_e) \quad (71)$$

$$T_{TR} = \frac{1}{3} (-\sqrt{3} \operatorname{Re} \mathbf{A} - \operatorname{Im} \mathbf{A} - B_e)$$

Wtedy, gdy z wyrażen (71) otrzymuje się dodatnią wartość susceptancji, wówczas jest ona susceptancją kondensatora, natomiast wtedy, gdy z wyrażen (71) otrzymuje się wartość ujemną, jest ona susceptancją induktora.

*Przykład 3.* Odbiornik przedstawiony na rysunku 11 ma susceptancję równoważną  $B_e = -0,25 \text{ S}$  oraz admitancję niezrównoważenia:

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re} \mathbf{A} + j \operatorname{Im} \mathbf{A} = 0,3536 e^{-j105^\circ} = (0,0915 - j 0,3416) \text{ S}$$

zatem susceptancje kompensatora obliczone ze wzoru (71) winny mieć wartości:

$$T_{RS} = 0,1444 \text{ S}, \quad T_{ST} = -0,1444 \text{ S}, \quad T_{TR} = 0,25 \text{ S}$$

Kompensator może więc być zbudowany z kondensatora o impedancji  $Z = 1/0,1444 = 6,93 \ \Omega$  włączonego między fazy R i S, induktora o impedancji  $Z = 1/0,1444 = 6,93 \ \Omega$  włą-

czonogo między fazy S i T, oraz kondensatora o impedancji  $Z = 1/0,25 = 4,0 \Omega$  włączonego między fazy T i R, czyli tak, jak jest to pokazane na rysunku 12. Kompensator taki eliminuje całkowicie prąd bierny i prąd niezrównoważenia źródła, redukując wartość skuteczną wektora prądów zasilania  $\|\mathbf{i}\|$  z wartości 190,5 A do 95,3 A.

## 11. WNIOSKI

Przedstawiony artykuł porządkuje teorię mocy trójprzewodowych obwodów trójfazowych z przebiegami sinusoidalnymi. Pokazuje, że pewne wielkości energetyczne, powszechnie stosowane w elektrotechnice, błędnie charakteryzują właściwości energetyczne takich obwodów. Teoria mocy trójprzewodowych obwodów trójfazowych z przebiegami sinusoidalnymi może być oparta na rozkładzie prądu zasilania na ortogonalne składowe energetyczne, to jest na prąd czynny, bierny oraz prąd niezrównoważenia. Rozkład ten umożliwia interpretację zjawisk energetycznych w takich obwodach oraz tworzy wygodną podstawę do projektowania kompensatorów równoważących.

## ANEKS

### Iloczyn skalarny wektorów trójfazowych w dziedzinie częstotliwości

Iloczyn skalarny wektorów  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$ , zdefiniowany w dziedzinie czasowej, może być przedstawiony jako:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}^T(t) \mathbf{y}(t) dt = \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r \in N} \mathbf{x}_r^T e^{jr\omega_1 t} \right\} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{s \in N} \mathbf{y}_s e^{js\omega_1 t} \right\} dt$$

z niezależnymi od siebie indeksami  $r$  i  $s$ . Wyrażenie całkowane jest sumą iloczynów postaci:

$$X_r \cos(r\omega_1 t + \alpha_r) Y_s \cos(s\omega_1 t + \beta_s) \quad (\text{A.2})$$

Dla każdego  $r \neq s$  jest to funkcja sinusoidalna o okresie  $T$ , zatem jej całka (A.1) jest równa zero. Całka ta może być różna od zera tylko wtedy, gdy  $r = s = n$ , gdyż wyrażenie (A.2) może mieć wówczas składową stałą. Iloczyn skalarny (A.1) może być więc przedstawiony jako:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n \in N} \mathbf{x}_n^T e^{jn\omega_1 t} \right\} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n \in N} \mathbf{y}_n e^{jn\omega_1 t} \right\} dt = \quad (\text{A.3})$$

$$= \sum_{n \in N} \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{x}_n^T e^{jn\omega_1 t} \right\} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{y}_n e^{jn\omega_1 t} \right\} dt$$

przy czym w wyrażeniu (A.3) zmieniono kolejność całkowania i sumowania. Wyrażenie całkowane jest dla każdej harmonicznej rzędu  $n$ , sumą trzech podobnych wyrażen dla każdej z faz obwodu. Jeżeli  $\mathbf{X}_n = X_n e^{j\alpha_n}$  oraz  $\mathbf{Y}_n = Y_n e^{j\beta_n}$ , wówczas dla pojedynczej fazy wyrażenie to ma postać:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{X}_n e^{jn\omega_1 t} \right\} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{Y}_n e^{jn\omega_1 t} \right\} dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T [X_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) Y_n \cos(n\omega_1 t + \beta_n)] dt = \quad (\text{A.4})$$

$$= X_n Y_n \cos(\alpha_n - \beta_n) = \operatorname{Re} \left\{ X_n Y_n^* \right\}$$

Suma takich wyrażen dla wszystkich faz i harmonicznych rzędu  $n$  ze zbioru  $N$  ma ostatecznie postać:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n \in N} \frac{2}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{x}_n^T e^{jn\omega_1 t} \right\} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{y}_n e^{jn\omega_1 t} \right\} dt = \quad (\text{A.5})$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{n \in N} \mathbf{x}_n^T \mathbf{y}_n^*$$

pozwalającą obliczać iloczyn skalarny wektorów wielkości trójfazowych  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$  w dziedzinie częstotliwości.

## LITERATURA

1. A I E E Committee: *Apparent power in three-phase systems*. Transactions A I E E, 1920, 39, 1450.
2. Buchholz F.: *Die Drehstrom-Scheinleistung bei ungleichmabiger Belastung der drei Zweige*. Licht und Kraft 1922, 2, 9–11.
3. Czarniecki L. S.: *Equivalent circuits of unbalanced loads supplied with symmetrical and asymmetrical voltage and their identification*. Archiv für Elektrotechnik 1995, 78, 165–168.
4. Czarniecki L. S.: *Moce i kompensacja w obwodach z okresowymi przebiegami prądu i napięcia. Część I. Teoria mocy Budeanu: 60 lat zhdzeń*. JUEE 1997, III, 1, 37–43.
5. Czarniecki L. S.: *Orthogonal decomposition of the current in a three-phase nonlinear asymmetrical circuit with nonsinusoidal voltage*. IEEE Trans. Instr. Measur. 1988, 37, 1, 30–34.
6. Czarniecki L. S.: *Power related phenomena in three-phase unbalanced systems*. IEEE Trans. Power Delivery 1995, 10, 3, 1168–1176.
7. Fortesque C. L.: *Methods of symmetrical coordinates applied to the solution of polyphase networks*. Trans. A I E E 1918, 37, 3, 217–250.
8. Fryze S.: *Teoretyczne i fizyczne podstawy definicji mocy czynnej, biernej i pozornej w niesymetrycznych układach wielofazowych o odkształconych przebiegach napięć i prądów*. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, ELEKTRYKA 1985, 100, 29–46.
9. Gyugyi L., Otto R. A., Putman T. H.: *Principles and application of static thyristor controlled shunt compensators*. IEEE Trans. PAS 1978, 97, 5, 1935–1945.
10. Hanzelka Z.: *Zastosowanie kompensatorów statycznych do kompensacji i symetryzacji odbiorników niezrównoważonych*, ELEKTROTECHNIKA 1987, 6, 4, 341–366.
11. Klinger G.: *L-C Kompensation und Symmetrierung für Mehrphasensysteme mit beliebigem Spannungsverlauf*. etz Archiv 1979, 2, 57–61.
12. Koch, K.: *Bestimmung von Groben in Mehr-Leiter-Systemen, Teil II: Erweiterung der Zwei-Leiter-Definitionen auf Mehr-Leiter-Systeme*. etz Archiv 1986, 8, 10, 341–345.

13. Lyon W. V. : *Reactive power and unbalanced circuits*. Electr. World 1920, 75, 25, 1417–1420.
14. Nowomiejski Z., Cichowska Z. : *Niezerównoważone układy trójfazowe*. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej ELEKTRYKA 1964, 17, 25–76.
15. Quade W. : *Zusammensetzung der Wirk-, Blind- und Scheinleistung bei Wechselstromen beliebiger Kurvenform und neue Leistungsdefinitionen für unsymmetrische Mehrphasen-systeme beliebiger Kurvenform*. etz Archiv 1937, 1312–1320.
16. Rosenzweig I. : *Symboliczny, wielowymiarowy rachunek wektorowy jako metoda analizy układów wielofazowych*. Czasopismo Techniczne 1939, 6–11.



### Leszek S. Czarnecki

ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1962 r. W roku 1969 uzyskał stopień doktora, z wyróżnieniem, za pracę dotyczącą syntezy układów realizujących przekształcenie Hilberta. Umożliwiła ona konstrukcję, po raz pierwszy, miernika mocy biernej w obwodach o przebiegach odkształconych wg definicji Budeanu. Stopień doktora habilitowanego uzyskał na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej

w 1984 r. za pracę dotyczącą identyfikacji, interpretacji i modyfikacji właściwości energetycznych obwodów z przebiegami odkształconymi. W latach 1984–86 zatrudniony w Kanadyjskiej Akademii Nauk (National Research Council of Canada) jako visiting research officer. Od 1987 roku zatrudniony w Wyższej Szkole Inżynierskiej w Zielonej Górze (obecnie Politechnika Zielonogórska). Od 1989 roku pracuje na Wydziale Elektrotechniki i Inżynierii Komputerowej Uniwersytetu Stanowego Louisiany jako *associate professor* a obecnie jako *professor*. Za opracowanie teorii mocy i metod kompensacji asymetrycznych obwodów trójfazowych z przebiegami odkształconymi Instytut Inżynierów Elektryków i Elektroników (IEEE) nadał mu w 1996 roku stopień Fellow IEEE. Jest zagranicznym członkiem Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej (PTETiS).

Działalność naukową łączy dr Czarnecki z alpinizmem. W 1973 r. przeszedł główną grań Tatr; w 1975 r. był członkiem zespołu, który przeszedł po raz pierwszy 5-tysięczną grań, 19 szczytów, Ruwenzori i wszedł na wszystkie 5-cio tysięczne szczyty Afryki. W 1977 uczestniczył w narciarskim, 500-kilometrowym, trawersie Spitsbergenu w Arktyce. W 1979 r. wszedł bez wspomaganie aparaturą tlenową na wys. 8350 m w masywie Lhotse w Himalajach. Wspiął się w Andach, Dolomitach i górach Wrangella na Alasce. W 1999 roku wszedł samotnie na McKinley'a, 6184 m n.p.m.

Internet Home Page: <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/4739>